

SVEUČILIŠTE
U SPLITU
SVEUČILIŠNI
ODJEL ZA
STRUČNE STUDIJE

ČVRSTOĆA KONSTRUKCIJA

BOŽE PLAZIBAT
ADO MATOKOVIĆ
VLADIMIR VETMA

SKRIPTA

ISBN 978-953-7220-62-4

Split, 2022.

IZDAVAČ

Sveučilište u Splitu
Sveučilišni odjel za stručne studije

AUTORI

dr. sc. Bože Plazibat, profesor visoke škole u trajnom zvanju
dr. sc. Ado Matoković, profesor visoke škole u trajnom zvanju
Vladimir Vetma, predavač

RECENZENTI

prof. dr. sc. Frane Vlak
doc. dr. sc. Marko Vukasović

LEKTURA

izv. prof. dr. sc. Jadranka Nemeth-Jajić

ISBN 978-953-7220-62-4

Odlukom Povjerenstva za izdavačku djelatnost Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Urbroj: 2181-193-111/1-22-15, ovo djelo se objavljuje kao izdanje Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije.

Predgovor

Ova su skripta namijenjena u prvom redu studentima specijalističkoga diplomskoga stručnog studija **Strojarstvo** koji se izvodi na Sveučilišnom odjelu za stručne studije Sveučilišta u Splitu. Mišljenja smo da skripta mogu biti korisna i ostalim studentima koji su upisali studij strojarstva na bilo kojem fakultetu u Hrvatskoj, a koji slušaju izloženo gradivo u sklopu kolegija različitih naziva (Nauka o čvrstoći II, Mehanika materijala II...).

Skripta sadrže predavanja iz navedenog predmeta i niz ilustrativnih primjera s detaljno objašnjenim postupcima rješavanja. Na kraju svakog poglavlja dani su zadatci za samostalni rad studenata.

U prvome, uvodnom dijelu objašnjena je potencijalna energija deformiranosti te su dani izrazi za njezino izračunavanje za osnovne slučajeve opterećenja štapa.

Drugi dio bavi se koeficijentima podatnosti. Objašnjeni su pojmovi poopćene sile i poopćenog pomaka te je opisana matrica podatnosti. Na primjerima osnovnih opterećenja štapa pokazano je određivanje poopćenih pomaka uz pomoć koeficijenata podatnosti.

U trećem poglavlju navedeni su Castiglianovi teoremi te primjena drugoga Castiglianova teorema na izračunavanje poopćenih pomaka, bilo linearnih pomaka ili kutnih zakreta. Također je pokazan način rješavanja statički neodređenih zadataka uz pomoć drugoga Castiglianova teorema.

U četvrtom dijelu skripata opisana je metoda određivanja poopćenih pomaka primjenom Mohrova integrala. Kao ispomoć u izračunavanju integrala produkta dviju funkcija navedeno je Vereščaginovo pravilo te slučajevi kada se ono može primjenjivati.

Peti dio skripata posvećen je metodi sila kao matričnoj metodi koja se koristi za rješavanje statički neodređenih zadataka. Na nekoliko ilustrativnih primjera jedanput i dva puta statički neodređenih linijskih i okvirnih nosača objašnjen je postupak rješavanja primjenom ove metode. Opisan je način dobivanja osnovne konstrukcije, ekvivalentne statički određene konstrukcije dobivene iz zadane uklanjanjem suvišnih veza; objašnjene su kanonske jednadžbe metode sila. Također je navedena prednost ove metode pri rješavanju simetričnih konstrukcija opterećenih antisimetrično.

U šestom dijelu skripata objašnjena je ukratko na najjednostavnijim primjerima metoda pomaka. Naveden je postupak određivanja kinematičke neodređenosti te dobivanja osnovne konstrukcije, kinematički određene konstrukcije dobivene iz zadane uvođenjem dodatnih veza. Razmatrani su samo zadatci s postojećim kutnim zakretima. Također je pokazana prednost ove metode pri rješavanju simetričnih konstrukcija opterećenih simetrično.

Sedmo poglavlje bavi se debelostjenim posudama i cijevima pod djelovanjem unutarnjeg i vanjskog tlaka. Izvedeni su izrazi za radijalno i cirkularno naprezanje te za radijalni pomak za navedeno djelovanje tlaka. Pokazan je i način dimenzioniranja debelostjenih posuda i cijevi korištenjem teorija čvrstoće: teorije najvećeg posmičnog naprezanja i teorije najveće distorzijske energije (HMH teorija).

U osmom poglavlju opisano je savijanje tankih kružnih ploča. Na jednostavnim primjerima pokazan je način rješavanja diferencijalne jednadžbe savijanja tankih kružnih ploča te postupak određivanja raspodjele radijalnih i cirkularnih momenata savijanja. Objašnjen je i postupak određivanja progibne plohe.

Deveto poglavlje bavi se uvijanjem štapova neokruglog presjeka. Dani su izrazi za najveća posmična naprezanja i relativni kut uvijanja pri uvijanju štapova eliptičnog, pravokutnog i trokutnog poprečnog presjeka. Kratko je opisano i uvijanje tankostjenih štapova zatvorenog i otvorenog poprečnog presjeka.

U posljednjem, desetom poglavlju dana su rješenja bez postupka rješavanja onih zadataka koji su na kraju svakog poglavlja dani studentima za samostalno rješavanje.

Na kraju skripata, kao dodatak, stavljeno je i poglavlje u kojem je ponovljeno gradivo iz *Tehničke mehanike I* i *Nauke o čvrstoći*, a koje se odnosi na određivanje unutarnjih sila u proizvoljnom poprečnom presjeku štapa pri različitim slučajevima opterećenja štapa.

Koristimo se prigodom zahvaliti recenzentima prof. dr. sc. Frani Vlaku i doc. dr. sc. Marku Vukasoviću na pomnu čitanju teksta i korisnim savjetima kojima su podigli kvalitetu ovih skripata.

Svima koji upozore na eventualne slovne ili računске pogreške koje su promaknule i autorima i recenzentima unaprijed zahvaljujemo.

Autori

SADRŽAJ

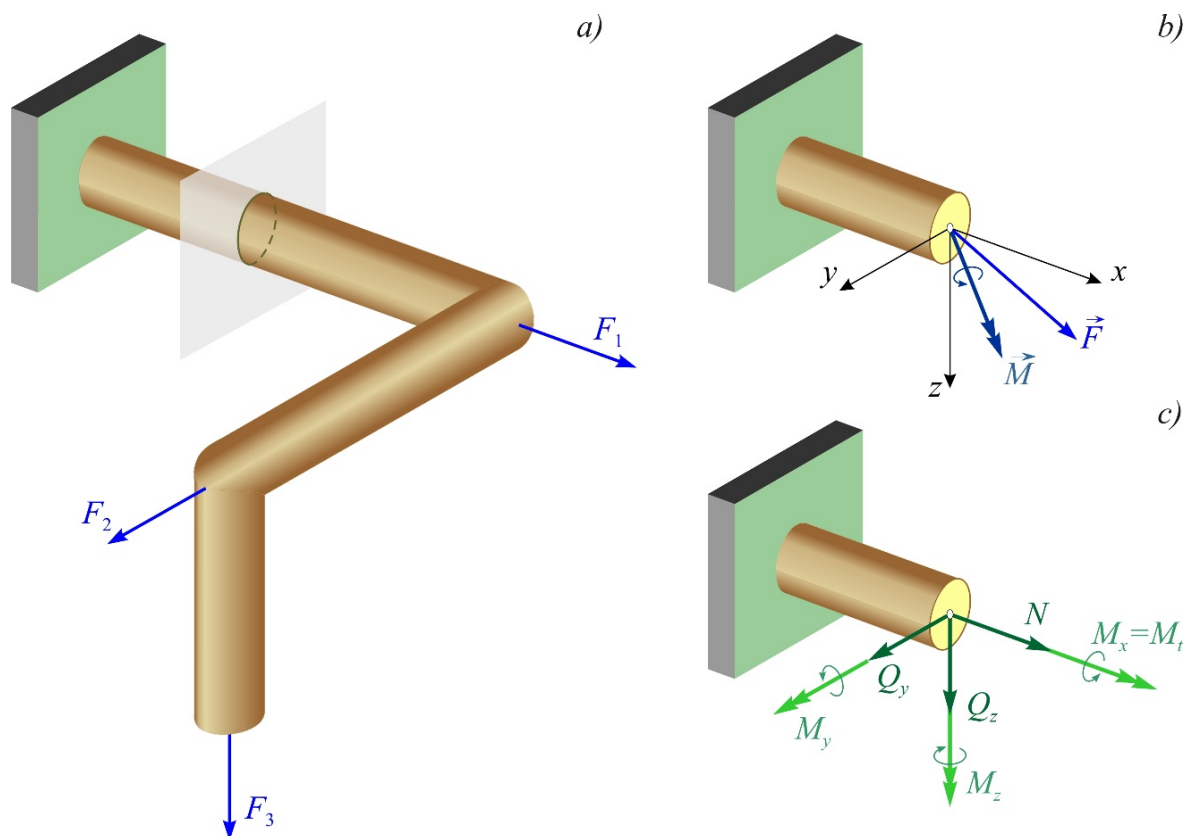
<i>Predgovor</i>	<i>i</i>
SADRŽAJ	<i>iii</i>
1. POTENCIJALNA ENERGIJA DEFORMIRANOSTI	1
1.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE	6
1.2. UVIJANJE	11
1.3. SAVIJANJE	14
1.4. OKVIRNI NOSAČI	16
2. KOEFICIJENTI PODATNOSTI	19
2.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE	21
2.2. UVIJANJE	23
2.3. SAVIJANJE	26
3. CASTIGLIANOVI TEOREMI	31
3.1. STATIČKI ODREĐENI ZADATCI	32
3.1.1. Aksijalno opterećenje	32
3.1.2. Uvijanje	36
3.1.3. Savijanje	38
3.2. STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI	45
3.2.1. Aksijalno opterećenje	45
3.2.2. Uvijanje	48
3.2.3. Savijanje	49
4. MOHROV INTEGRAL	55
4.1. VEREŠČAGINOVO PRAVILO	55
4.2. AKSIJALNO OPTEREĆENJE	57

4.3.	UVIJANJE	60
4.4.	SAVIJANJE	61
5.	METODA SILA	71
5.1.	AKSIJALNO OPTEREĆENJE	71
5.2.	UVIJANJE	74
5.3.	SAVIJANJE	76
6.	METODA POMAKA	95
7.	DEBELOSTJENE CILINDRIČNE POSUDE I CIJEVI	143
7.1.	GEOMETRIJA, OPTEREĆENJE, OGRANIČENJA I PRETPOSTAVKE O DEFORMIRANJU I RASPODJELI NAPREZANJA	144
7.2.	GEOMETRIJSKA ANALIZA	146
7.3.	PRIMJENA HOOKEOVA ZAKONA	146
7.4.	UVJET RAVNOTEŽE I DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA RAVNOTEŽE ELEMENTA	148
7.5.	RASPODJELA NAPREZANJA I POMAKA U DEBELOSTJENOJ POSUDI I CIJEVI	149
7.5.1.	Debelostjena posuda opterećena samo unutarnjim tlakom	149
7.5.2.	Debelostjena posuda opterećena samo vanjskim tlakom	156
8.	SAVIJANJE TANKIH KRUŽNIH PLOČA	163
8.1.	GEOMETRIJA I KOORDINATNI SUSTAV	163
8.2.	GRANIČENJA OBLIKA, POMAKA I OPTEREĆENJA	164
8.3.	KOMPONENTE UNUTARNJIH SILA U PLOČI	164
8.4.	PRETPOSTAVKE O DEFORMIRANJU I RASPODJELI NAPREZANJA	166
8.5.	GEOMETRIJSKA ANALIZA	167
8.6.	PRIMJENA HOOKEOVA ZAKONA	169
8.7.	PRIMJENA UVJETA RAVNOTEŽE	169
8.8.	DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA SAVIJANJA TANKE KRUŽNE PLOČE	170
9.	UVIJANJE ŠTAPOVA NEOKRUGLOGA POPREČNOG PRESJEKA	179
9.1.	UVIJANJE ŠTAPA ELIPTIČNOGA POPREČNOG PRESJEKA	179

9.2.	UVIJANJE ŠTAPA PRAVOKUTNOGA POPREČNOG PRESJEKA	181
9.3.	UVIJANJE ŠTAPA TROKUTNOGA POPREČNOG PRESJEKA	184
9.4.	UVIJANJE ŠTAPA ZATVORENOGA I OTVORENOGA TANKOSTJENOGA POPREČNOG PRESJEKA	186
10.	RJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU	191
A.	UNUTARNJE SILE U PRESJEKU ŠTAPA	201
A.1.	AKSIJALNO OPTEREĆENJE	201
A.2.	UVIJANJE	206
A.3.	SAVIJANJE – linijski nosači	208
A.4.	SAVIJANJE – okvirni nosači	209
	LITERATURA	213

1. POTENCIJALNA ENERGIJA DEFORMIRANOSTI

Pod djelovanjem vanjskog opterećenja, aktivnih i reakcijskih sila, na neku konstrukciju, u njoj se akumulira potencijalna energija deformiranosti. Tako će se na primjer prostorna konstrukcija opterećena prema slici 1.1.a deformirati. Može se pokazati da energija deformiranosti ovisi o unutarnjim silama koje se javljaju u poprečnom presjeku štapa. U najopćenitijem slučaju redukcijom svih sila koje djeluju u poprečnom presjeku štapa na težište njegova poprečnog presjeka dobiju se dva vektora: glavni vektor sila \vec{F} i glavni moment \vec{M} (slika 1.1.b). Glavni vektor sila \vec{F} , kao i glavni moment \vec{M} , mogu se razložiti na tri komponente u smjeru lokalnih osi x , y i z pravokutnoga koordinatnog sustava (slika 1.1.c).



Slika 1.1. a) prostorni štap opterećen koncentriranim silama, b) glavni vektor sila i glavni moment u poprečnom presjeku štapa, c) unutarnje sile u poprečnom presjeku

Te komponente čine unutarnje sile u poprečnom presjeku štapa i nazivaju se kako slijedi:

- N – uzdužna sila
- Q_y – poprečna sila duž lokalne osi y
- Q_z – poprečna sila duž lokalne osi z
- $M_x \equiv M_t$ – moment uvijanja

- M_y – moment savijanja u odnosu na lokalnu os y
- M_z – moment savijanja u odnosu na lokalnu os z .

Pri statičkom djelovanju vanjskih sila na elastično tijelo pretpostavlja se da se sav rad vanjskih sila W pretvara u potencijalnu energiju deformiranosti U :

$$W = U. \quad (1.1)$$

Za diferencijalni element štapa vrijedi:

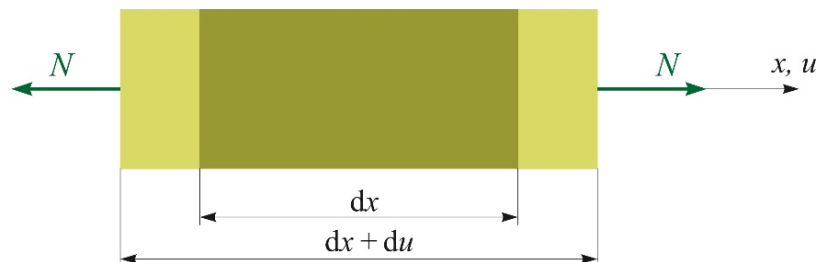
$$dW = dU. \quad (1.2)$$

U nastavku je dan način izračunavanja diferencijala potencijalne energije deformiranosti dU za osnovne slučajeve opterećenja diferencijalnog elementa štapa kako je to navedeno u literaturi [7].

Rastezanje diferencijalnog elementa štapa

Za diferencijalni element štapa opterećen na rastezanje/sabijanje je (slika 1.2.):

$$dU = \frac{1}{2} \cdot N \cdot du, \quad (1.3)$$



Slika 1.2. Rastezanje diferencijalnog elementa

gdje je N uzdužna sila, a u uzdužni pomak.

Budući da je

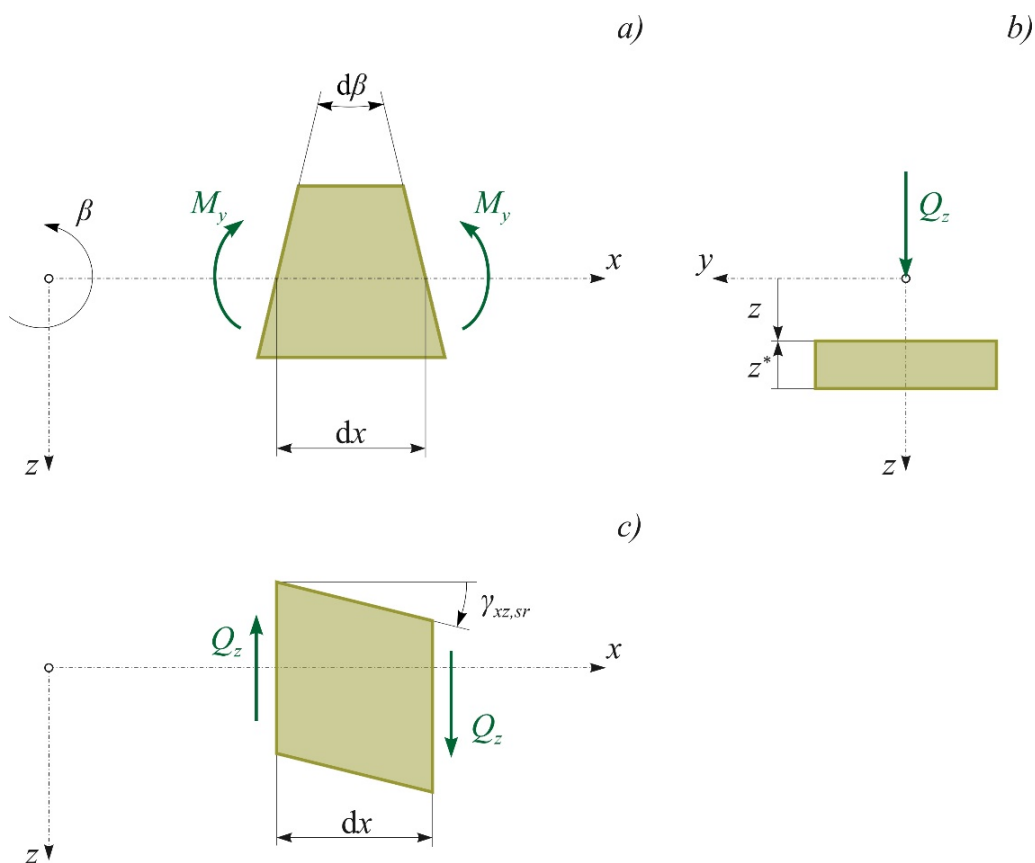
$$du = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx$$

poznata jednadžba, spomenuta u kolegiju Nauka o čvrstoći, u kojoj je EA krutost u odnosu na rastezanje/sabijanje, bit će dalje:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx = \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dx. \quad (1.4)$$

Savijanje diferencijalnog elementa štapa u xz ravnini

Potencijalna energija deformiranosti zbog momenta savijanja u xz ravnini glasi (slika 1.3.a):



Slika 1.3. Savijanje diferencijalnog elementa u xz ravnini

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_y \cdot d\beta, \quad (1.5)$$

gdje je M_y moment savijanja u odnosu na os y , a β kutni zakret u odnosu na os y , pri čemu su y i z glavne težišne osi.

Kako je

$$d\beta = \frac{M_y}{E \cdot I_y} \cdot dx,$$

jednadžba (1.5) prelazi u izraz:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_y \cdot d\beta = \frac{1}{2} \cdot M_y \cdot \frac{M_y}{E \cdot I_y} \cdot dx = \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot dx. \quad (1.6)$$

Zbog poprečne sile može se napisati (slika 1.3.c):

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \int_A (\tau_{xz} \cdot dA) \cdot (\gamma_{xz} \cdot dx), \quad (1.7)$$

gdje je posmično naprezanje dano izrazom poznatim iz kolegija Nauka o čvrstoći:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y^*}{I_y \cdot b_z}$$

Imajući u vidu Hookeov zakon,

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},$$

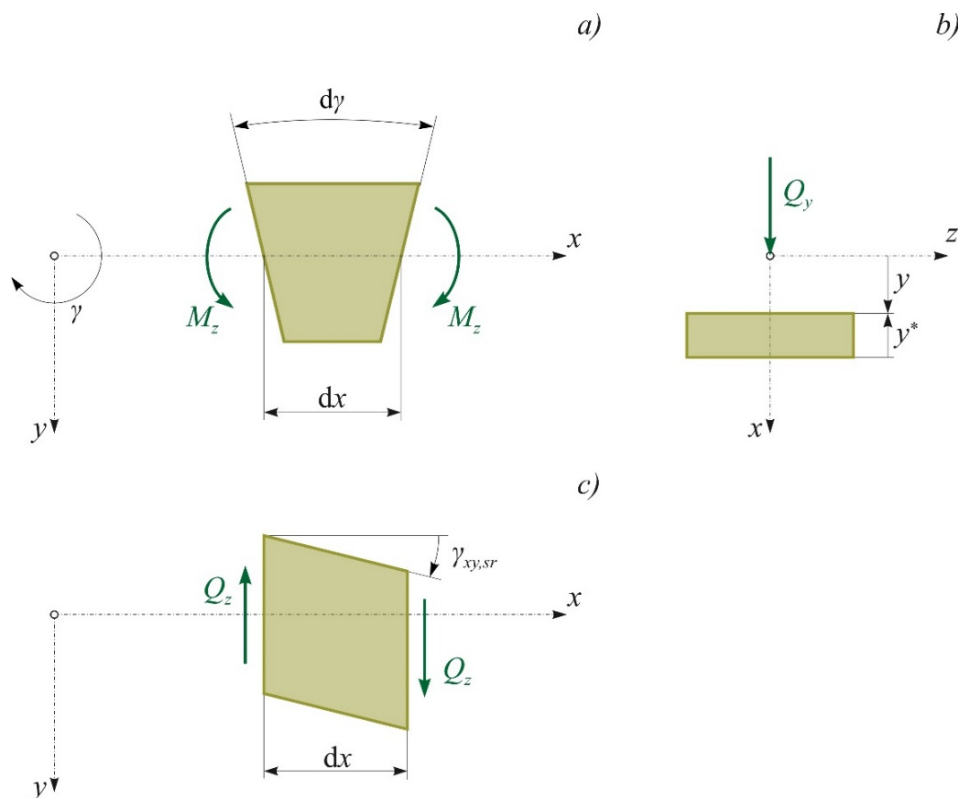
kako je pokazano u [7], izraz (1.7) konačno postaje:

$$dU = \frac{\kappa_z \cdot Q_z^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dx, \quad (1.8)$$

gdje je κ_z faktor smicanja za savijanje u xz ravnini ovisan o obliku poprečnog presjeka.

Savijanje diferencijalnog elementa štapa u xy ravnini

Za savijanje u xy ravnini može se napisati (slika 1.4.a):



Slika 1.4. Savijanje diferencijalnog elementa u xy ravnini

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_z \cdot d\gamma, \quad (1.9)$$

gdje je M_z moment savijanja u odnosu na os z , a γ kutni zakret u odnosu na os z , pri čemu su y i z glavne težišne osi.

Sličnim postupkom kao kod savijanja u xz ravnini može se konačno dobiti:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_z \cdot d\gamma = \frac{1}{2} \cdot M_z \cdot \frac{M_z}{EI_z} \cdot dx = \frac{M_z^2}{2EI_z} \cdot dx, \quad (1.10)$$

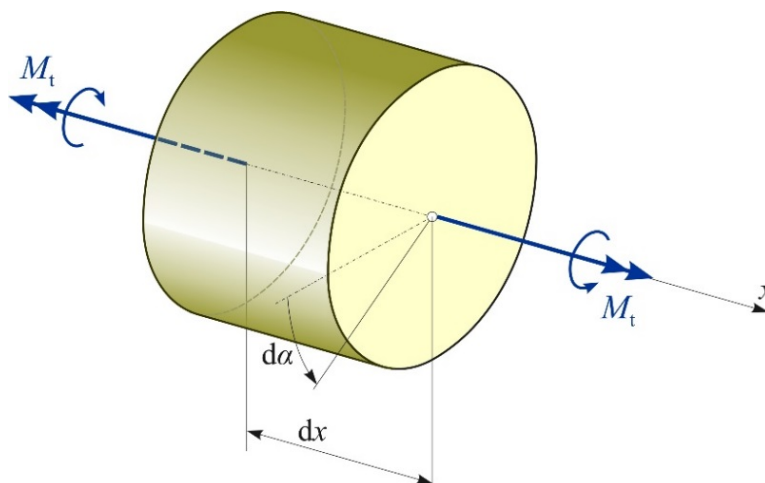
odnosno od poprečne sile Q_y :

$$dU = \frac{\kappa_y \cdot Q_y^2}{2GA} \cdot dx, \quad (1.11)$$

gdje je κ_y faktor smicanja za savijanje u xy ravnini ovisan o obliku poprečnog presjeka.

Uvijanje diferencijalnog elementa štapa

Zbog momenta uvijanja može se napisati (slika 1.5.):



Slika 1.5. Uvijanje diferencijalnog elementa

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot d\alpha, \quad (1.12)$$

gdje je M_t moment uvijanja, a α kutni zakret u odnosu na os x .

Budući da je

$$d\alpha = \frac{M_t}{GI_t} \cdot dx,$$

izraz (1.12) postaje:

$$dU = \frac{M_t^2}{2GI_t} \cdot dx, \quad (1.13)$$

gdje je GI_t krutost u odnosu na uvijanje.

Opći slučaj opterećenja diferencijalnog elementa štapa

Ukupna potencijalna energija deformiranosti diferencijalnog elementa štapa u ovom slučaju može se prikazati u obliku:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{\kappa_z \cdot Q_z^2}{GA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{\kappa_y \cdot Q_y^2}{GA} + \frac{M_t^2}{GI_t} \right) \cdot dx. \quad (1.14)$$

Ukupna potencijalna energija deformiranosti sustava štapova, izražena preko unutarnjih sila, dobije se integriranjem izraza (1.14):

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{2 \cdot A_i \cdot E_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{k_z Q_{zi}^2}{2 \cdot A_i \cdot G_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{k_y Q_{yi}^2}{2 \cdot A_i \cdot G_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}^2}{2 \cdot I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{zi}^2}{2 \cdot I_{zi} \cdot E_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \frac{M_{ti}^2}{2 \cdot I_{pi} \cdot G_i} \cdot dx, \quad (1.15)$$

gdje je n broj štapova sustava. Budući da će se u zadacima koji slijede pri uvijanju razmatrati samo štapovi okrugloga poprečnog presjeka, u zadnjem članu izraza (1.15), kao dio torzijske krutosti štapa, uzet je polarni moment tromosti poprečnog presjeka I_p .

Način određivanja unutarnjih sila za osnovne vrste opterećenja opisan je u skriptama *Tehnička mehanika I* i *Nauka o čvrstoći* istih autora. Zbog važnosti unutarnjih sila za izračunavanje potencijalne energije deformiranosti štapa na kraju ovih skriptata dodano je poglavlje u kojem je na nizu primjera ponovljen postupak izračunavanja unutarnjih sila za osnovna opterećenja štapa.

U primjerima koji slijede pokazat će se izračunavanje potencijalne energije deformiranosti štapa za osnovne slučajeve opterećenja pa će izraz (1.15) poprimati jednostavnije oblike.

1.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE

Pri aksijalnom opterećenju štapa u njegovu poprečnom presjeku od unutarnjih sila javlja se samo uzdužna sila pa se potencijalna energija deformiranosti izračunava sukladno izrazu (1.15) prema:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{2 \cdot A_i \cdot E_i} \cdot dx. \quad (1.16)$$

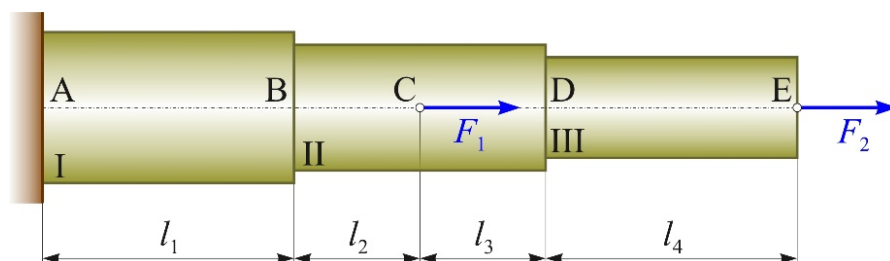
Ako je $N_i / (A_i \cdot E_i)$ konstantno po duljini i -tog segmenta štapa, izraz (1.16) prelazi u izraz:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i}. \quad (1.17)$$

Primjer 1.1.

Štap sastavljen od triju segmenata opterećen je koncentriranim silama prema slici 1.6. Valja izračunati potencijalnu energiju deformiranosti štapa.

Zadano je: $F_1 = 50 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $A = 100 \text{ mm}^2$, $E = 100 \text{ GPa}$, $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$, $l_3 = l$, $l_4 = 2 \cdot l$, $A_I = 4 \cdot A$, $A_{II} = 3,24 \cdot A$, $A_{III} = 2,25 \cdot A$.



Slika 1.6. *Primjer 1.1.* Štap sastavljen od triju segmenata aksijalno opterećen

Rješenje:

Uzdužne sile mogu se odrediti metodom presjeka kako je to objašnjeno u dodanom poglavlju na kraju ovih skripata, a iznose:

- I. područje: $0 \leq x \leq 3 \cdot l$

$$N_1 = F_A = 70 \text{ kN},$$

- II. područje: $3 \cdot l \leq x \leq 6 \cdot l$

$$N_2 = F_2 = 20 \text{ kN}.$$

Potencijalna energija deformiranosti sada je prema izrazu (1.17) jednaka:

$$U = \frac{N_1^2 \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot A_I \cdot E} + \frac{N_1^2 \cdot l}{2 \cdot A_{II} \cdot E} + \frac{N_2^2 \cdot l}{2 \cdot A_{III} \cdot E} + \frac{N_2^2 \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot A_{III} \cdot E},$$
$$U = \frac{0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 100 \cdot 10^3} \cdot \left[\frac{(70 \cdot 10^3)^2 \cdot 2}{400} + \frac{(70 \cdot 10^3)^2}{324} + \frac{(20 \cdot 10^3)^2}{324} + \frac{(20 \cdot 10^3)^2 \cdot 2}{225} \right],$$

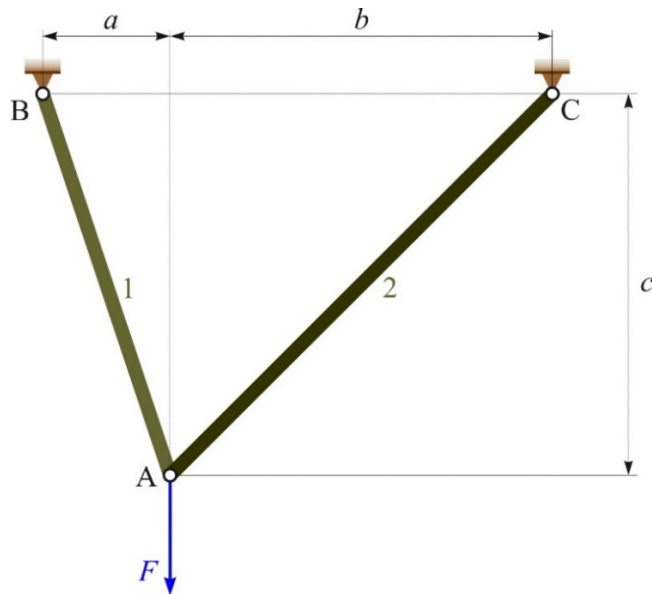
odnosno

$$U = 111034 \text{ N} \cdot \text{mm} = 111,034 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Primjer 1.2.

Za konstrukciju sastavljenu od dvaju štapova i opterećenu prema slici 1.7. potrebno je izračunati potencijalnu energiju deformiranosti. Štapovi su kvadratnoga poprečnog presjeka stranice a_1 i napravljeni od materijala kojemu je poznat modul elastičnosti E .

Zadano je: $F = 8 \text{ kN}$, $a = 0,8 \text{ m}$, $b = 2,4 \text{ m}$, $c = 2,8 \text{ m}$, $a_1 = 8 \text{ mm}$, $E = 70 \text{ GPa}$.



Slika 1.7. *Primjer 1.2.* Konstrukcija sastavljena od dvaju štapova opterećena koncentriranom silom

Rješenje:

Uzdužne sile u štapovima 1 i 2 mogu se dobiti iz jednadžba ravnoteže postavljenih za čvor A kako je to pokazano u primjerima u dodanom poglavlju na kraju skriptata. Ove sile iznose:

$$N_1 = 6,240 \text{ kN},$$

$$N_2 = 2,634 \text{ kN},$$

dok su površine poprečnih presjeka štapova:

$$A_1 = A_2 = A = a_1^2 = 8^2 = 64 \text{ mm}^2.$$

Potencijalna energija deformiranosti sada prema (1.17) glasi:

$$U = \frac{N_1^2 \cdot l_1}{2 \cdot A \cdot E} + \frac{N_2^2 \cdot l_2}{2 \cdot A \cdot E} = \frac{1}{2 \cdot A \cdot E} \cdot (N_1^2 \cdot l_1 + N_2^2 \cdot l_2)$$

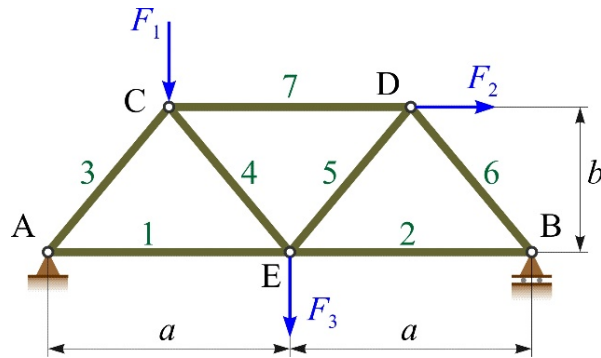
$$U = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{2 \cdot 64 \cdot 70 \cdot 10^3} \cdot (6,240^2 \cdot 2,912 + 2,634^2 \cdot 3,688)$$

$$U = 15511 \text{ N} \cdot \text{mm} = 15,511 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Primjer 1.3.

Za rešetkastu konstrukciju zadanu i opterećenu prema slici 1.8. valja izračunati potencijalnu energiju deformiranosti. Svi štapovi su kružnoga poprečnog presjeka i izrađeni od istog materijala.

Zadano je: $F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 12 \text{ kN}$, $F_3 = 8 \text{ kN}$, $a = 2,5 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $A = 254 \text{ mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$.



Slika 1.8. *Primjer 1.3. Rešetkasti nosač u ravnini*

Rješenje:

Uzdužne sile u štapovima rešetkastog nosača dobivene metodom čvorova i duljine štapova dane su u tablici 1.1.

Tablica 1.1. Uzdužne sile u štapovima rešetke i njihove duljine

Štap	1	2	3	4	5	6	7
N_i kN	16,08	7,58	-6,38	-1,43	11,85	-11,85	-3,17
l_i m	2,5	2,5	1,953	1,953	1,953	1,953	2,5
$N_i^2 \cdot l_i$ kN ² · m	646,4	143,6	79,5	3,99	274,2	274,2	25,1

Potencijalna energija deformiranosti može se dobiti prema izrazu (1.17):

$$U = \sum_{i=1}^7 \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} = \frac{1}{2 \cdot A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^7 N_i^2 \cdot l_i .$$

Dalje je:

$$U = \frac{(646,4 + 143,6 + 79,5 + 3,99 + 274,2 + 274,2 + 25,1) \cdot 10^9}{2 \cdot 254 \cdot 210 \cdot 10^3} ,$$

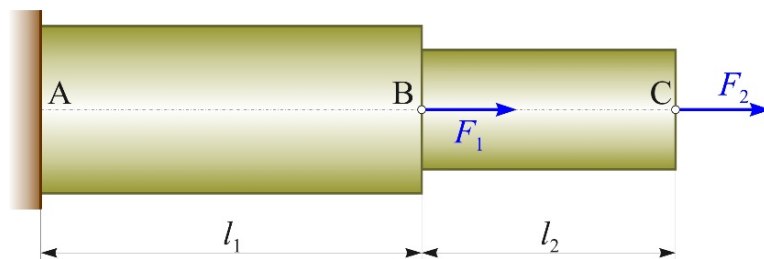
$$U = 13564 \text{ N} \cdot \text{mm} = 13,564 \text{ N} \cdot \text{m} .$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 1.1. Štap sastavljen od dvaju segmenata kružnoga poprečnog presjeka opterećen je silama zadanih iznosa F_1 i F_2 prema slici Z.1.1. Promjeri poprečnih presjeka su d_1 i d_2 , a oba segmenta su izrađena od istog materijala kojemu je modul elastičnosti E .

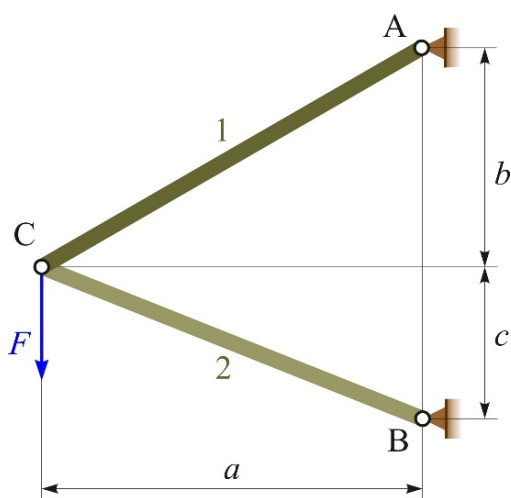
Valja izračunati potencijalnu energiju deformiranosti štapa ako je zadano: $F_1 = 12 \text{ kN}$, $F_2 = 15 \text{ kN}$, $l_1 = 1,4 \text{ m}$, $l_2 = 0,8 \text{ m}$, $d_1 = 15 \text{ mm}$, $d_2 = 12 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$.



Slika Z.1.1. *Zadatak 1.1.*

Zadatak 1.2. Za konstrukciju sastavljenu od dvaju štapova i opterećenu prema slici Z.1.2. potrebno je izračunati potencijalnu energiju deformiranosti. Poprečni presjek štapova je kvadrat zadanog brida a_1 . Štapovi su napravljeni od materijala poznatog modula elastičnosti E .

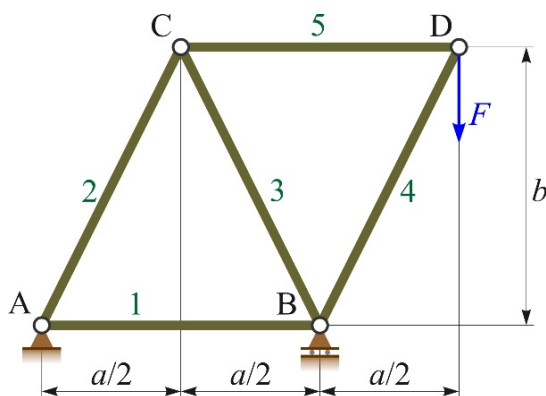
Zadano je: $F = 8 \text{ kN}$, $a = 2,2 \text{ m}$, $b = 1,4 \text{ m}$, $c = 0,8 \text{ m}$, $a_1 = 12 \text{ mm}$, $E = 70 \text{ GPa}$.



Slika Z.1.2. *Zadatak 1.2.*

Zadatak 1.3. Za rešetkastu konstrukciju zadanu i opterećenu prema slici Z.1.3. valja izračunati potencijalnu energiju deformiranosti. Svi štapovi su kružnoga poprečnog presjeka i napravljeni od istog materijala.

Zadano je: $F = 15 \text{ kN}$, $a = 2,4 \text{ m}$, $b = 2,6 \text{ m}$, $d = 12 \text{ mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$.



Slika Z.1.3. *Zadatak 1.3.*

1.2. UVIJANJE

Kada je štap okrugloga poprečnog presjeka opterećen na uvijanje, u poprečnom presjeku štapa od unutarnjih sila javlja se samo moment uvijanja.

Potencijalna energija deformiranosti, uzimajući u obzir izraz (1.15), izračunava se prema izrazu:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{ti}^2}{2 \cdot I_{pi} \cdot G_i} \cdot dx. \quad (1.18)$$

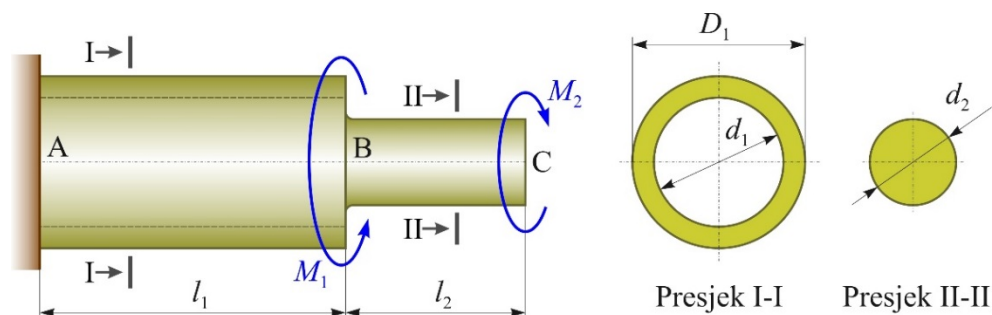
Za konstantnu vrijednost $M_t / (I_{pi} \cdot G_i)$ po duljini i -tog segmenta štapa izraz (1.18) prelazi u izraz:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{M_{ti}^2 \cdot l_i}{2 \cdot I_{pi} \cdot G_i}. \quad (1.19)$$

Primjer 1.4.

Štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata i uklješten na lijevom kraju opterećen je momentima M_1 i M_2 . Lijevi dio štapa ima poprečni presjek oblika kružnog vijenca, a desni punog kruga (slika 1.9.). Valja odrediti potencijalnu energiju deformiranosti štapa.

Zadano je: $l_1 = 0,9 \text{ m}$, $l_2 = 0,6 \text{ m}$, $M_1 = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 16 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $D_1 = 120 \text{ mm}$, $d_1 = 102 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$, $G = 76 \text{ GPa}$.



Slika 1.9. *Primjer 1.4.* Štap izložen uvijanju s poprečnim presjecima

Rješenje:

Momenti uvijanja u svakom segmentu dobiveni su metodom presjeka i glase:

$$M_{t1} = -M_2 + M_1 = -16 + 30 = 14 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{t2} = -M_2 = -16 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Polarni momenti tromosti prvog i drugog segmenta jesu:

$$I_{p1} = \frac{120^4 \cdot \pi}{32} - \frac{102^4 \cdot \pi}{32} = 9,731 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_{p2} = \frac{100^4 \cdot \pi}{32} = 9,817 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Potencijalna energija deformiranosti izračunana prema izrazu (1.19) iznosi:

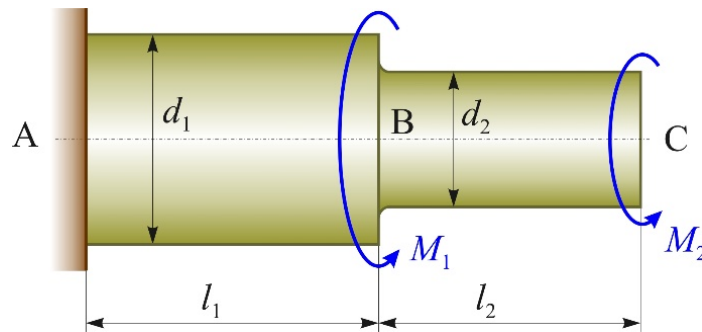
$$U = \frac{M_{t1}^2 \cdot l_1}{2 \cdot I_{p1} \cdot G} + \frac{M_{t2}^2 \cdot l_2}{2 \cdot I_{p2} \cdot G} = \frac{14^2 \cdot 10^{12} \cdot 0,9 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,731 \cdot 10^6 \cdot 76 \cdot 10^3} + \frac{(-16)^2 \cdot 10^{12} \cdot 0,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,817 \cdot 10^6 \cdot 76 \cdot 10^3}$$

$$U = 222197 \text{ N} \cdot \text{mm} = 222,197 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Primjer 1.5.

Štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata i ukliješten na lijevom kraju opterećen je momentima M_1 i M_2 (slika 1.10.).

Valja odrediti potencijalnu energiju deformiranosti štapa ako je zadano: $l_1 = 1,4 \text{ m}$, $l_2 = 1,2 \text{ m}$, $M_1 = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $d_1 = 114 \text{ mm}$, $d_2 = 90 \text{ mm}$, $G = 28 \text{ GPa}$.



Slika 1.10. *Primjer 1.5.* Štap izložen uvijanju

Rješenje:

Momenti uvijanja u svakom segmentu iznose:

$$M_{t1} = M_1 + M_2 = 8 + 12 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{t2} = M_2 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Polarni momenti tromosti prvog i drugog segmenta jesu:

$$I_{p1} = \frac{114^4 \cdot \pi}{32} = 16,581 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_{p2} = \frac{90^4 \cdot \pi}{32} = 6,441 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

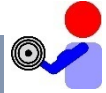
Potencijalna energija deformiranosti računana prema izrazu (1.19) iznosi:

$$U = \frac{M_{t1}^2 \cdot l_1}{2 \cdot I_{p1} \cdot G} + \frac{M_{t2}^2 \cdot l_2}{2 \cdot I_{p2} \cdot G},$$

$$U = \frac{20^2 \cdot 10^{12} \cdot 1,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 16,581 \cdot 10^6 \cdot 28 \cdot 10^3} + \frac{12^2 \cdot 10^{12} \cdot 1,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 6,441 \cdot 10^6 \cdot 28 \cdot 10^3} = 1082174 \text{ N} \cdot \text{mm},$$

$$U = 1082,2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

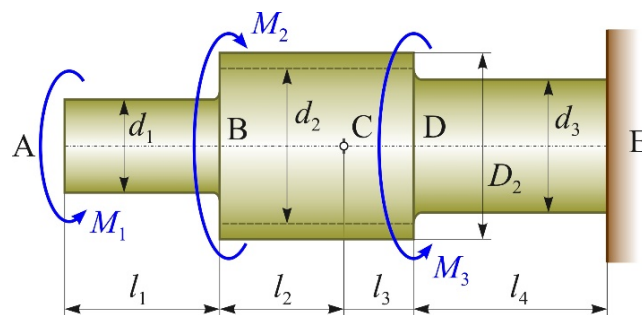
ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 1.4. Štap sastavljen od triju segmenata okrugloga poprečnog presjeka opterećen je koncentriranim momentima M_1 , M_2 i M_3 prema slici Z.1.4. Oba segmenta izrađena su od istog materijala kojemu je modul smicanja G .

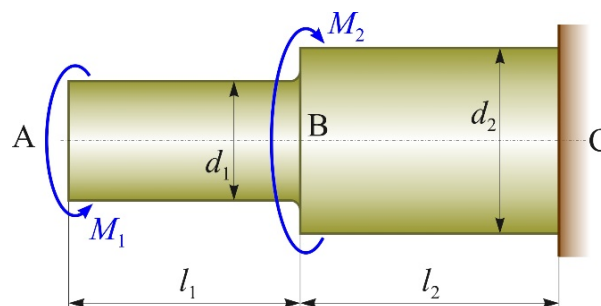
Valja izračunati potencijalnu energiju deformiranosti štapa.

Zadano je: $l_1 = 0,6 \text{ m}$, $l_2 = 0,8 \text{ m}$, $l_3 = 1,2 \text{ m}$, $M_1 = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 14 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_3 = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $d_1 = 80 \text{ mm}$, $D_2 = 110 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$, $d_3 = 90 \text{ mm}$, $G = 28 \text{ GPa}$.



Slika Z.1.4. Zadatak 1.4.

Zadatak 1.5. Za štap sastavljen od dvaju segmenata okrugloga poprečnog presjeka i opterećen na uvijanje prema slici Z.1.4. valja izračunati potencijalnu energiju deformiranosti štapa ako je zadano: $l_1 = 0,8 \text{ m}$, $l_2 = 1,2 \text{ m}$, $M_1 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $d_2 = 80 \text{ mm}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Slika Z.1.5. Zadatak 1.5.

1.3. SAVIJANJE

Pri savijanju silama (poprečnom savijanju) u poprečnom presjeku štapa javljaju se poprečna sila i moment savijanja. Uzimajući u obzir izraz (1.15), potencijalna energija deformiranosti može se računati prema izrazu:

$$U = \int_0^l \frac{M_y^2}{2 \cdot I_y \cdot E} \cdot dx + \int_0^l \frac{k_z \cdot Q_z^2}{2 \cdot A \cdot G} \cdot dx, \quad (1.20)$$

gdje je k_z faktor smicanja ovisan o obliku poprečnog presjeka. Tako je za kružni poprečni presjek $k_z = 1,1$, a za pravokutni $k_z = 1,2$.

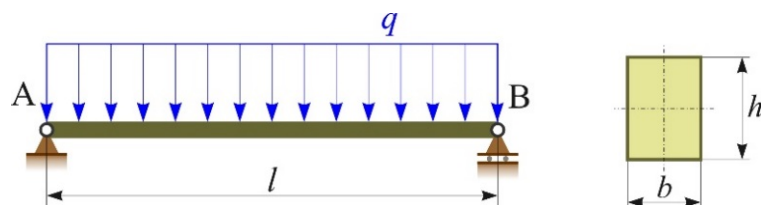
Kada se radi o relativno dugim štapovima (duljina štapa deset i više puta veća od najveće dimenzije poprečnog presjeka), utjecaj poprečne sile na ukupnu energiju deformiranosti vrlo je malen pa se može zanemariti. Izraz (1.20) tada prelazi u izraz:

$$U = \int_0^l \frac{M_y^2}{2 \cdot I_y \cdot E} \cdot dx. \quad (1.21)$$

Primjer 1.6.

Jednostavni nosač zadanoga pravokutnog poprečnog presjeka ($b \times h$) opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem q (slika 1.11.). Potrebno je odrediti potencijalnu energiju deformiranosti nosača.

Zadano je: $l = 3 \text{ m}$, $q = 24 \text{ kN/m}$, $b = 6 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Slika 1.11. *Primjer 1.6.* Jednostavni nosač s poprečnim presjekom

Rješenje:

Izrazi za unutarnje sile glase:

$$M_y = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

$$Q_z = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x.$$

Geometrijske karakteristike zadanoga pravokutnog poprečnog presjeka jesu:

$$A = 60 \cdot 120 = 7200 \text{ mm}^2, \quad I_y = \frac{60 \cdot 120^3}{12} = 8,64 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

dok je faktor smicanja za pravokutni poprečni presjek $k_z = 1,2$.

Dalje je prema izrazu (1.20):

$$U = \frac{1}{2 \cdot I_y \cdot E} \cdot \int_0^l \left(\frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)^2 \cdot dx + \frac{k_z}{2 \cdot A \cdot G} \cdot \int_0^l \left(\frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x \right)^2 \cdot dx,$$

$$U = \frac{q^2}{8 \cdot I_y \cdot E} \cdot \int_0^l \left(l^2 \cdot x^2 - 2 \cdot l \cdot x^3 + x^4 \right) \cdot dx + \frac{k_z \cdot q^2}{2 \cdot A \cdot G} \cdot \int_0^l \left(\frac{l^2}{4} - l \cdot x + x^2 \right) \cdot dx,$$

$$U = \frac{q^2}{8 \cdot I_y \cdot E} \cdot \left(\frac{l^5}{3} - \frac{l^5}{2} + \frac{l^5}{5} \right) + \frac{k_z \cdot q^2}{2 \cdot A \cdot G} \cdot \left(\frac{l^3}{4} - \frac{l^3}{2} + \frac{l^3}{3} \right),$$

$$U = \frac{q^2 \cdot l^5}{240 \cdot I_y \cdot E} + \frac{k_z \cdot q^2 \cdot l^3}{24 \cdot A \cdot G} = \frac{q^2 \cdot l^5}{240 \cdot I_y \cdot E} \cdot \left(1 + 10 \cdot k_z \cdot \frac{E \cdot I_y}{G \cdot A \cdot l^2} \right).$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobije se:

$$U = \frac{24^2 \cdot 3^5 \cdot 10^{15}}{240 \cdot 8,64 \cdot 10^6 \cdot 210 \cdot 10^3} \cdot \left(1 + 10 \cdot k_z \cdot \frac{210 \cdot 10^3 \cdot 8,64 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3 \cdot 7,2 \cdot 10^3 \cdot 3^2 \cdot 10^6} \right),$$

$$U = 321429 \cdot (1 + 0,0042) = 322779 \text{ N} \cdot \text{mm} = 322,779 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Drugi član u zagradi predstavlja udio poprečne sile u ukupnoj potencijalnoj energiji deformiranosti i on iznosi 0,4 %.

Za ovaj primjer udio poprečne sile može se iskazati izrazom:

$$10 \cdot k_z \cdot \frac{E \cdot I_y}{G \cdot A \cdot l^2} = 10 \cdot 1,2 \cdot \frac{210 \cdot \frac{h^4}{24}}{80 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot l^2} = \frac{2,625}{\left(\frac{l}{h} \right)^2}$$

te je za različite omjere l/h dan u tablici 1.2.

Tablica 1.2. Udio poprečne sile u potencijalnoj energiji deformiranosti u ovisnosti o omjeru l/h

l/h	3	4	5	10	15	20	25
$2,625 / (l/h)^2$	29,2 %	16,4 %	10,5 %	2,6 %	1,2 %	1,7 %	0,4 %

Iz tablice se može zaključiti da kod kratkih štapova ($l/h < 5$) poprečna sila treba biti uzeta u obzir pri računanju potencijalne energije deformiranosti.

1.4. OKVIRNI NOSAČI

Kod okvirnih nosača u ravnini općenito se u poprečnom presjeku od unutarnjih sila javljaju:

- N – uzdužna sila
- Q_z – poprečna sila duž lokalne osi z
- M_y – moment savijanja u odnosu na lokalnu os y .

Izraz za potencijalnu energiju deformiranosti (1.15) u ovom slučaju prelazi u izraz:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{2 \cdot A_i \cdot E_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{k_z Q_{zi}^2}{2 \cdot A_i \cdot G_i} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}^2}{2 \cdot I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx. \quad (1.22)$$

Za duge štapove utjecaj je uzdužne i poprečne sile na ukupnu potencijalnu energiju deformiranosti zanemariv pa izraz (1.22) postaje:

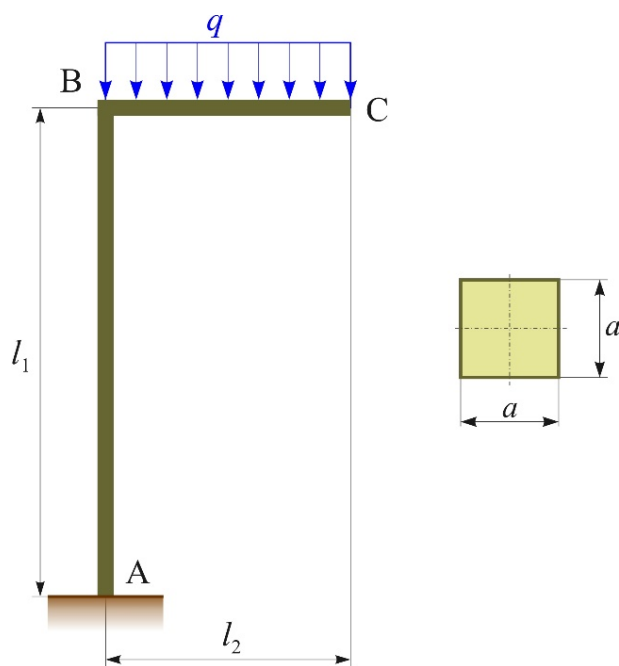
$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}^2}{2 \cdot I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx. \quad (1.23)$$

Primjer 1.7.

Okvirni nosač kvadratnoga poprečnog presjeka ($a \times a$) opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem q . Nosač je vezan za podlogu uklještenjem u A (slika 1.12.).

Potrebno je odrediti potencijalnu energiju deformiranosti okvirnog nosača zanemarujući utjecaj uzdužnih i poprečnih sila.

Zadano je: $l = 3 \text{ m}$, $a = 20 \text{ mm}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $l_1 = l$, $l_2 = 0,5 \cdot l$.



Slika 1.12. *Primjer 1.7.* Okvirni nosač s poprečnim presjekom

Rješenje:

Aksijalni moment tromosti iznosi:

$$I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{20^4}{12} = 13333,3 \text{ mm}^4;$$

pa je

$$\frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} = \frac{1}{2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 13333,3 \cdot 10^{-12}} = 1,7857 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}^2}.$$

Izrazi za momente savijanja po područjima nosača glase:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ m} \quad M_y = -q \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -0,25 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$0 \leq x_2 \leq 0,5 \text{ m} \quad M_y = -\frac{q \cdot (0,5 - x)^2}{2} = -\frac{2 \cdot (0,5 - x)^2}{2} = -(0,5 - x)^2.$$

Potencijalna energija deformiranosti računana prema izrazu (1.23) iznosi:

$$U = \frac{1}{2 \cdot I_y \cdot E} \cdot \left[\int_0^1 (-0,25)^2 \cdot dx + \int_0^{0,5} (0,5 - x)^4 \cdot dx \right],$$

pri čemu je

$$\int_0^{0,5} (0,5 - x)^4 \cdot dx \quad 0,5 - x = t \quad -dx = dt \quad -\int_{0,5}^0 t^4 \cdot dt = \int_0^{0,5} t^4 \cdot dt = \frac{0,5^5}{5}.$$

Dalje je

$$U = \frac{1}{2 \cdot I_y \cdot E} \cdot \left[\left(0,25^2 + \frac{0,5^5}{5} \right) \cdot 10^6 \right] = 1,7857 \cdot 10^{-4} \cdot 0,06875 \cdot 10^6$$

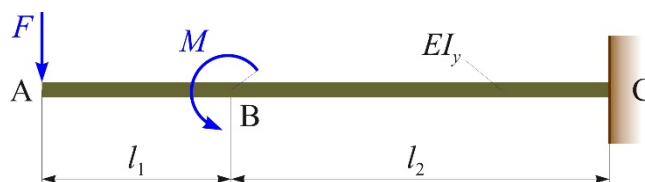
$$U = 12,28 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



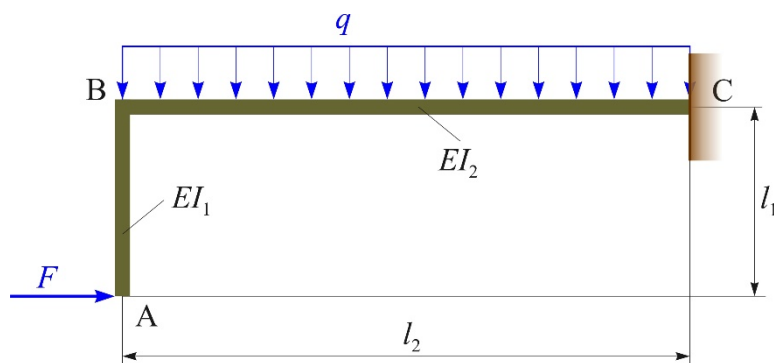
Zadatak 1.6. Linijski nosač kvadratnoga poprečnog presjeka zadan je i opterećen prema slici Z.1.4. Potrebno je izračunati potencijalnu energiju deformiranosti štapa.

Zadano je: $F = 20 \text{ kN}$, $M = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 0,8 \text{ m}$, $a = 150 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $l_1 = l$, $l_2 = 2 \cdot l$.



Slika Z.1.6. Zadatak 1.6.

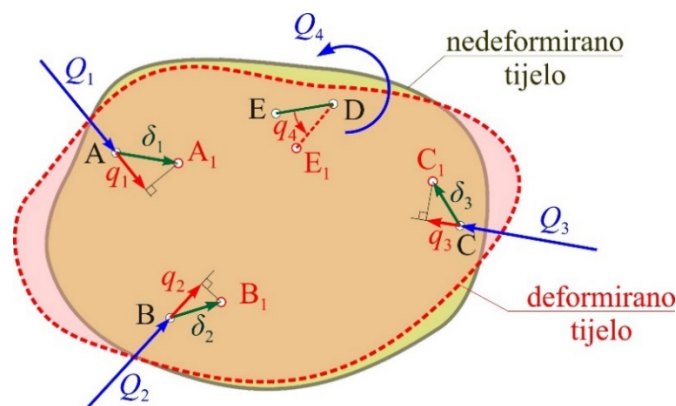
Zadatak 1.7. Za okvirni nosač prema slici Z.1.7. potrebno je izračunati potencijalnu energiju deformiranosti štapa ako je zadano: $F = 10 \text{ kN}$, $q = 15 \text{ kN/m}$, $l = 0,8 \text{ m}$, $I_y = 8,64 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $E = 69 \text{ GPa}$, $l_1 = l$, $l_2 = 3 \cdot l$, $I_1 = I_y$, $I_2 = 2 \cdot I_y$.



Slika Z.1.7. Zadatak 1.7.

2. KOEFICIJENTI PODATNOSTI

Čvrsto deformabilno tijelo opterećeno je trima koncentriranim silama i koncentriranim momentom kako je prikazano na slici 2.1. Sile koje djeluju na tijelo jesu *poopćene sile*; dakle, poopćene sile prema slici 2.1. su tri koncentrirane sile, ali i koncentrirani moment. Poopćene sile označene su oznakama Q_1 , Q_2 , Q_3 i Q_4 . Punom linijom prikazan je na istoj slici oblik tijela prije djelovanja vanjskog opterećenja, a crtkanom linijom deformirani oblik tijela. Pri deformiranju pojedine točke tijela dobit će odgovarajuće pomake. Projekcije ovih pomaka na pravce poopćenih sila nazivaju se *poopćenim pomacima*. Poopćeni pomaci označeni su s q_1 , q_2 , q_3 i q_4 , a mogu biti kako pomaci u užem smislu, tako i kutni zakreti.



Slika 2.1. Poopćene sile i poopćeni pomaci

Pri djelovanju sustava sila na linearno elastično deformabilno tijelo može se primijeniti metoda superpozicije po kojoj se ukupni poopćeni pomak neke točke može dobiti zbrajanjem poopćenih pomaka iste točke dobivenih zbog pojedinačnog djelovanja svake od poopćenih sila. Poopćeni pomaci mogu se tada odrediti pomoću poopćenih sila prema sljedećem izrazu:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= f_{11} \cdot Q_1 + f_{12} \cdot Q_2 + f_{13} \cdot Q_3 + f_{14} \cdot Q_4 \\
 q_2 &= f_{21} \cdot Q_1 + f_{22} \cdot Q_2 + f_{23} \cdot Q_3 + f_{24} \cdot Q_4 \\
 q_3 &= f_{31} \cdot Q_1 + f_{32} \cdot Q_2 + f_{33} \cdot Q_3 + f_{34} \cdot Q_4 \\
 q_4 &= f_{41} \cdot Q_1 + f_{42} \cdot Q_2 + f_{43} \cdot Q_3 + f_{44} \cdot Q_4
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

odnosno u matričnom zapisu prema:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}.
 \tag{2.2}$$

Izraz (2.2) napisan na jednostavniji način glasi:

$$\{q\} = [f] \cdot \{Q\}.
 \tag{2.3}$$

Član na lijevoj strani predstavlja vektor popoćenih pomaka; matrica na desnoj strani je kvadratna matrica podatnosti, a drugi član na desnoj strani je vektor popoćenih sila.

Članovi kvadratne matrice podatnosti f_{ij} su koeficijenti podatnosti, pri čemu vrijedi jednakost:

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (2.4)$$

što znači da je matrica podatnosti simetrična matrica. Po definiciji koeficijent podatnosti f_{ii} uvijek je pozitivan:

$$f_{ii} > 0, \quad (2.5)$$

dok koeficijent podatnosti f_{ij} može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli.

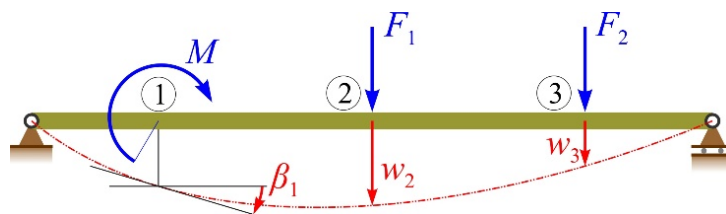
Koeficijent podatnosti f_{ij} je pripadni popoćeni pomak popoćene sile Q_i zbog jedinične popoćene sile Q_j .

Izraz (2.4) predstavlja *Maxwellov teorem* (teorem o uzajamnosti popoćenih pomaka), a dokaz tog teorema može se naći u [1].

Za zornije objašnjenje popoćenih sila i popoćenih pomaka mogu poslužiti dva primjera.

Na slici 2.2. prikazan je linijski nosač opterećen koncentriranim momentom u točki 1 i dvjema koncentriranim silama u točkama 2 i 3. Također je na istoj slici dana elastična linija s odgovarajućim kutom zakreta elastične linije na mjestu 1 i pomacima – progibima točaka 2 i 3. Vektori popoćenih sila i popoćenih pomaka glase:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}.$$

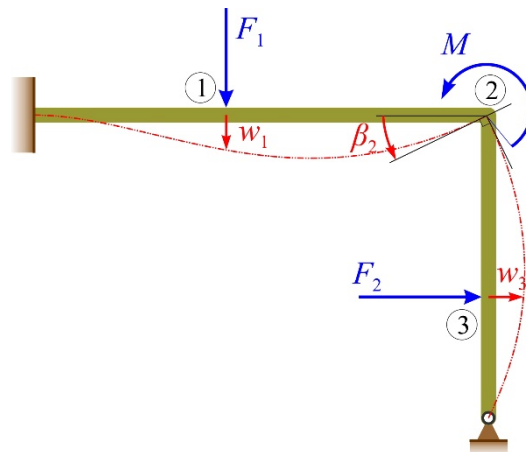


Slika 2.2. *Pooćene sile i pooćeni pomaci na linijskom nosaču*

Slikom 2.3. prikazan je statički neodređeni okvirni nosač opterećen dvjema koncentriranim silama i koncentriranim momentom te crtkanom linijom deformirani oblik tog nosača.

Ovdje vektori popoćenih sila i popoćenih pomaka glase:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}.$$



Slika 2.3. Poopćene sile i poopćeni pomaci na okvirnom nosaču

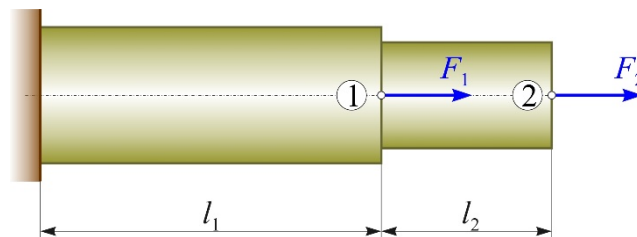
U nastavku objasniti će se određivanje ukupnih poopćenih pomaka deformiranog štapa s pomoću koeficijenta podatnosti, a za slučajeve aksijalnog opterećenja štapa, opterećenja štapa na uvijanje te opterećenja štapa na savijanje.

2.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE

Primjer 2.1.

Štap sastavljen od dvaju segmenata opterećen je koncentriranim silama prema slici 2.4. Valja označiti poopćene sile i poopćene pomake te odrediti matricu podatnosti. Treba izračunati uzdužne pomake točaka 1 i 2 pomoću koeficijenta podatnosti.

Zadano je: F , l , A , E te $F_1 = 3 \cdot F$, $F_2 = F$, $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$, $A_1 = 1,5 \cdot A$, $A_2 = A$, $E_1 = 2 \cdot E$, $E_2 = E$.



Slika 2.4. Primjer 2.1.

Rješenje:

Poopćene sile u matricinom zapisu jesu:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix},$$

a poopćeni pomaci u istom zapisu glase:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Poopćeni pomaci mogu se dobiti prema matričnoj jednadžbi (2.3):

$$[q] = [f] \cdot [Q].$$

Gornji izraz može se napisati prema (2.2) i na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}.$$

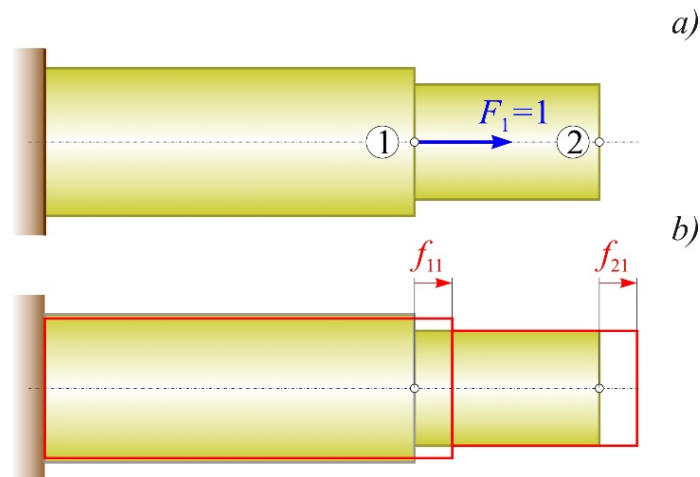
Uzdužni pomaci točaka **1** i **2** mogu se dobiti rješavanjem matrične jednadžbe:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$$

Koeficijent podatnosti f_{11} predstavlja uzdužni pomak točke **1** od jedinične sile na mjestu **1** i iznosi:

$$f_{11} = \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot l}{1,5 \cdot A \cdot 2 \cdot E} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E},$$

dok je koeficijent podatnosti f_{21} uzdužni pomak točke **2** od jedinične sile na mjestu **1** (slika 2.5.a i 2.5.b) određen izrazom:



Slika 2.5. *Primjer 2.1.*

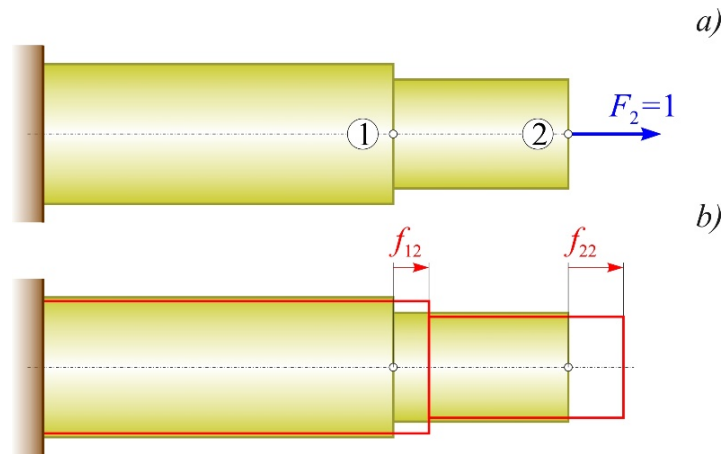
$$f_{21} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot l}{1,5 \cdot A \cdot 2 \cdot E} + \frac{0 \cdot l}{A \cdot E} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E}.$$

Na isti način je f_{22} uzdužni pomak točke **2** od jedinične sile na mjestu **2**:

$$f_{22} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot l}{1,5 \cdot A \cdot 2 \cdot E} + \frac{1 \cdot l}{A \cdot E} = \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E},$$

a koeficijent podatnosti f_{12} uzdužni pomak točke **1** od jedinične sile na mjestu **2** (slika 2.6.a i 2.6.b) određen izrazom:

$$f_{12} = \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot l}{1,5 \cdot A \cdot 2 \cdot E} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E}.$$



Slika 2.6. *Primjer 2.1.*

Može se uočiti jednakost izraza za f_{12} i f_{21} čime je i potvrđen Maxwellov teorem.

Matrica podatnosti glasi:

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} & \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} \end{bmatrix}.$$

Dalje je:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} & \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{A \cdot E} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 3 \cdot F \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{3} \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \\ \frac{11}{3} \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \end{Bmatrix}.$$

Za vrijednosti: $F = 10 \text{ kN}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $A = 144 \text{ mm}^2$ i $E = 105 \text{ GPa}$ uzdužni pomaci točaka **1** i **2** iznose:

$$u_1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{144 \cdot 105 \cdot 10^3} = 0,882 \text{ mm};$$

$$u_2 = \frac{11}{3} \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{144 \cdot 105 \cdot 10^3} = 1,213 \text{ mm}.$$

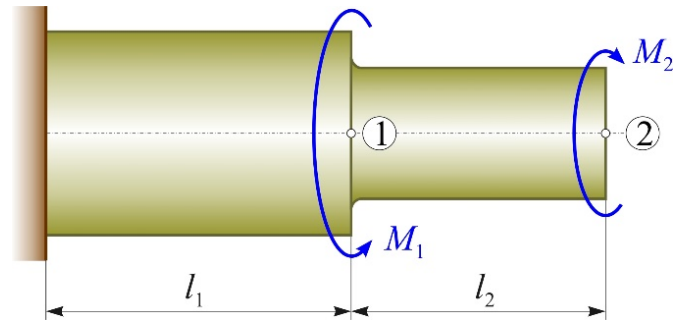
2.2. UVIJANJE

Primjer 2.2.

Štap sastavljen od dvaju segmenata opterećen je na uvijanje prema slici 2.7. Potrebno je označiti poopćene sile i poopćene pomake te odrediti koeficijente podatnosti.

Treba izračunati kutne zakrete presjeka 1 i 2 pomoću koeficijenata podatnosti ako je zadano:

$$M, l, I_p, G \text{ te } M_1 = 3 \cdot M, M_2 = M, l_1 = 1,2 \cdot l, l_2 = l, d_1 = 2 \cdot d, d_2 = d, G_1 = G_2 = G.$$



Slika 2.7. *Primjer 2.2.*

Rješenje:

U ovom zadatku popoćene sile su koncentrirani momenti:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ -M_2 \end{Bmatrix},$$

a popoćeni pomaci kutni zakreti poprečnih presjeka:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}.$$

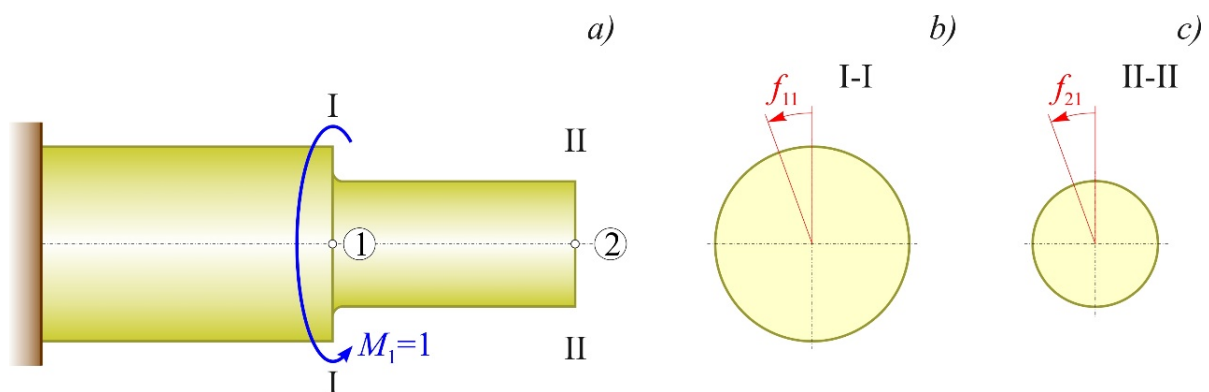
Poopćeni pomaci mogu se dobiti prema (2.2):

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1 \\ -M_2 \end{Bmatrix}.$$

Koeficijent podatnosti f_{11} predstavlja kutni zakret presjeka **1** od jediničnog momenta na mjestu **1** i iznosi:

$$f_{11} = \frac{M_{t1} \cdot l_1}{I_{p1} \cdot G} = \frac{1 \cdot 1,2 \cdot l}{16 \cdot I_p \cdot G} = \frac{3}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G},$$

dok je koeficijent podatnosti f_{21} kutni zakret presjeka **2** od jediničnog momenta na mjestu **1** (slika 2.8.a, 2.8.b i 2.8.c) određen izrazom:



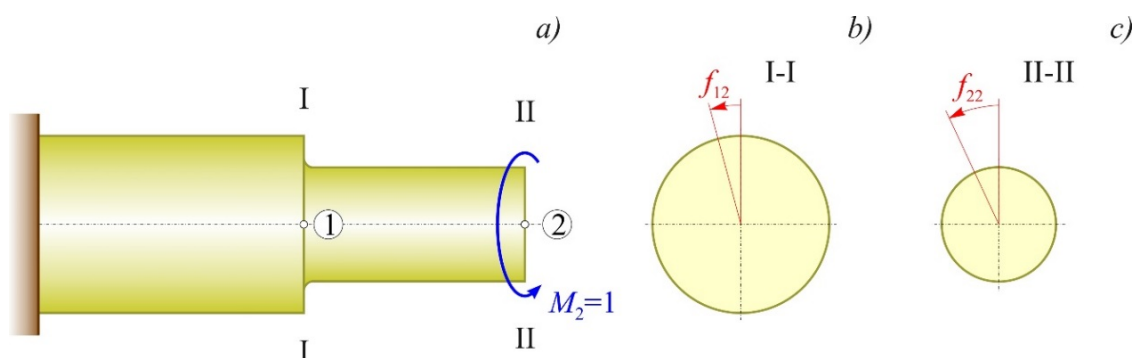
Slika 2.8. *Primjer 2.2.*

$$f_{21} = \frac{M_{t1} \cdot l_1}{I_{p1} \cdot G} + \frac{M_{t2} \cdot l_2}{I_{p2} \cdot G} = \frac{1 \cdot 1,2 \cdot l}{16 \cdot I_p \cdot G} + \frac{0 \cdot l}{I_p \cdot G} = \frac{3}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G}.$$

Na isti način je f_{22} kutni zakret presjeka **2** od jediničnog momenta na mjestu **2**:

$$f_{22} = \frac{M_{t1} \cdot l_1}{I_{p1} \cdot G} + \frac{M_{t2} \cdot l_2}{I_{p2} \cdot G} = \frac{1 \cdot 1,2 \cdot l}{16 \cdot I_p \cdot G} + \frac{1 \cdot l}{I_p \cdot G} = \frac{43}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G},$$

a koeficijent podatnosti f_{12} kutni zakret presjeka **1** od jediničnog momenta na mjestu **2** (slika 2.9.a, 2.9.b i 2.9.c) određen izrazom:



Slika 2.9. Primjer 2.2.

$$f_{12} = \frac{M_{t1} \cdot l_1}{I_{p1} \cdot G} = \frac{1 \cdot 1,2 \cdot l}{16 \cdot I_p \cdot G} = \frac{3}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G}.$$

Ukupni kutni zakreti presjeka **1** i **2** sada su:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G} & \frac{3}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G} \\ \frac{3}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G} & \frac{43}{40} \cdot \frac{l}{I_p \cdot G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 3 \cdot M \\ -M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{20} \cdot \frac{M \cdot l}{I_p \cdot G} \\ -\frac{17}{20} \cdot \frac{M \cdot l}{I_p \cdot G} \end{Bmatrix}.$$

Za vrijednosti: $M = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $G = 80 \text{ GPa}$ te promjere segmenata $d_1 = 160 \text{ mm}$ i $d_2 = 80 \text{ mm}$ za koje su polarni momenti tromosti:

$$I_p = I_{p2} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 80^4}{32} = 4,021 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_{p1} = 16 \cdot I_p = \frac{\pi \cdot 80^4}{32} = 64,336 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

kutni zakreti presjeka **1** i **2** iznose:

$$\alpha_1 = \frac{3}{20} \cdot \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{4,021 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^3} = 0,00112 \text{ rad};$$

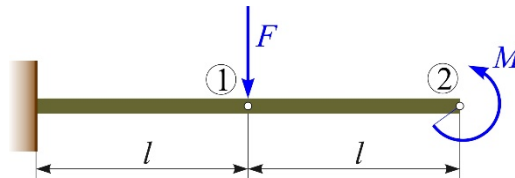
$$\alpha_2 = -\frac{17}{20} \cdot \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{4,021 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^3} = -0,00634 \text{ rad}.$$

2.3. SAVIJANJE

Primjer 2.3.

Za konzolu zadanu i opterećenu prema slici 2.10. valja označiti poopćene sile i poopćene pomake te odrediti koeficijente podatnosti. Treba izračunati progib točke **1** i nagib točke **2** pomoću koeficijena podatnosti.

Zadano je: F , l , I_y , E te $M = F \cdot l$.



Slika 2.10. Primjer 2.3.

Rješenje:

Poopćene sile su:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix},$$

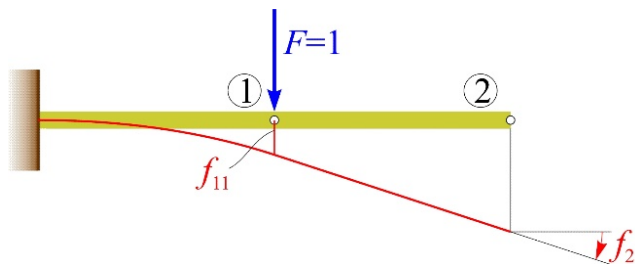
a poopćeni pomaci:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}.$$

Poopćeni pomaci mogu se dobiti prema:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}.$$

Koeficijent podatnosti f_{11} predstavlja progib točke **1** od jedinične sile na mjestu **1** $f_{11} = w(l)$, a koeficijent podatnosti f_{21} je kut zakreta elastične linije na mjestu **2** $f_{21} = \beta(2l) = \beta(l)$ nagib (slika 2.11.).



Slika 2.11. Primjer 2.3.

Ovaj koeficijent podatnosti može se dobiti rješavanjem diferencijalne jednadžbe savijanja elastične linije kako slijedi:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}, \quad M_y = -1 \cdot (l-x),$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot (l-x),$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_1 \right),$$

$$w = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right).$$

Konstante integracije C_1 i C_2 mogu se dobiti iz rubnih uvjeta:

$$w(0) = w_A = 0 \quad \text{i} \quad \beta(0) = \beta_A = -\frac{dw}{dx}(0) \quad \text{te iznose} \quad C_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 = 0.$$

Sada je

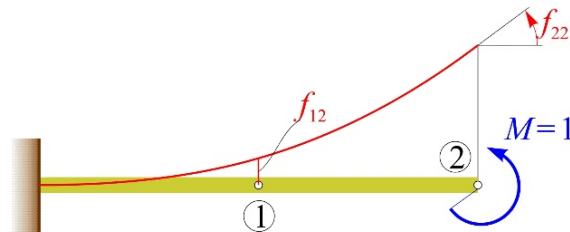
$$w = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right),$$

pa je

$$f_{11} = w(l) = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y}, \quad f_{21} = \beta(l) = -\frac{dw}{dx}(l) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_y}.$$

Na isti način je f_{22} nagib točke **2** od jediničnog momenta na mjestu **2**, a koeficijent podatnosti f_{12} progib točke **1** od jediničnog momenta na mjestu **2** (slika 2.12.).

Ovi koeficijenti podatnosti mogu se dobiti rješavanjem diferencijalne jednadžbe savijanja elastične linije kako slijedi:



Slika 2.12. *Primjer 2.3.*

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}, \quad M_y = 1,$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot (-1),$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot (-x + C_1),$$

$$w = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \right).$$

Konstante integracije C_1 i C_2 dobivene su prema rubnim uvjetima:

$$w(0) = w_A = 0 \quad \text{i} \quad \beta(0) = \beta_A = -\frac{dw}{dx}(0) \quad \text{te iznose} \quad C_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 = 0.$$

Sada su

$$\beta = -\frac{dw}{dx} = \frac{x}{E \cdot I_y}, \quad w = -\frac{x^2}{2 \cdot E \cdot I_y},$$

a za $x = 2 \cdot l$ je

$$f_{22} = \beta(2 \cdot l) = \frac{2 \cdot l}{E \cdot I_y},$$

odnosno za $x = l$

$$f_{12} = w(l) = -\frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I_y}.$$

Prema Maxwellovu teoremu je $f_{21} = f_{12}$, što se vidi i iz dobivenih izraza:

$$f_{21} = f_{12} = -\frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I_y}.$$

Poopćeni pomaci, progib točke **1** i nagib točke **2** mogu se sada dobiti kako slijedi:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_y} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_y} & 2 \cdot \frac{l}{E \cdot I_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F \\ F \cdot l \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{6} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y} \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y} \end{Bmatrix}.$$

Za vrijednosti $F = 8 \text{ kN}$, $l = 0,6 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$ te pravokutni poprečni presjek dimenzija $40 \times 80 \text{ mm}$ za koji je aksijalni moment tromosti:

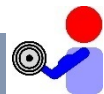
$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 80^3}{12} = 1,707 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

progib točke **1** i nagib točke **2** iznose:

$$w_1 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{8 \cdot 10^3 \cdot (0,6 \cdot 10^3)^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 1,707 \cdot 10^6} = -0,804 \text{ mm};$$

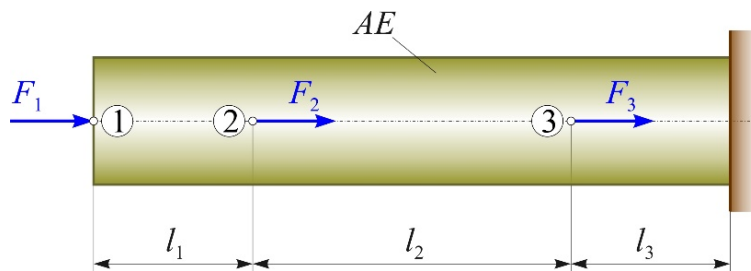
$$\beta_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8 \cdot 10^3 \cdot (0,6 \cdot 10^3)^2}{210 \cdot 10^3 \cdot 1,707 \cdot 10^6} = 0,01205 \text{ rad}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 2.1. Za aksijalno opterećeni štap prema slici Z.2.1. valja označiti poopćene sile i poopćene pomake te odrediti koeficijente podatnosti. Treba izračunati uzdužne pomake točaka **1**, **2** i **3** pomoću koeficijenata podatnosti.

Zadano je: F , l , A , E te $F_1 = 2 \cdot F$, $F_2 = F$, $F_3 = 3 \cdot F$, $l_1 = l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $l_3 = l$.

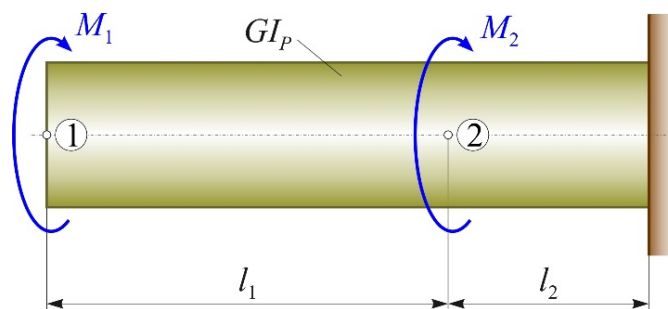


Slika Z.2.1. Zadatak 2.1.

Zadatak 2.2.

Za štap opterećen na uvijanje prema slici Z.2.2. potrebno je označiti poopćene sile i poopćene pomake te odrediti koeficijente podatnosti. Treba izračunati kutne zakrete presjeka **1** i **2** pomoću koeficijenata podatnosti.

Zadano je: M , l , I_p , G te $M_1 = 3 \cdot M$, $M_2 = M$, $l_1 = 1,2 \cdot l$, $l_2 = l$.

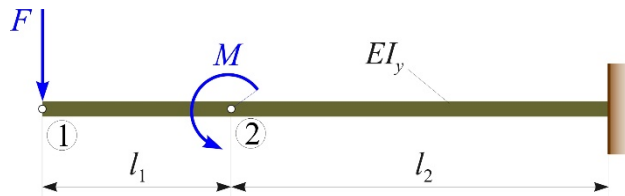


Slika Z.2.2. Zadatak 2.2.

Zadatak 2.3.

Za konzolu zadanu i opterećenu prema slici Z.2.3. valja označiti poopćene sile i poopćene pomake te odrediti koeficijente podatnosti. Treba izračunati progib točke 1 i nagib točke 2 pomoću koeficijenata podatnosti.

Zadano je: F , l , I_y , E te $M = 2 \cdot F \cdot l$, $l_1 = l$, $l_2 = 2 \cdot l$.



Slika Z.2.3. Zadatak 2.3.

3. CASTIGLIANOVI TEOREMI

U prethodnom poglavlju obrađeni su koeficijenti podatnosti (utjecajni koeficijenti) te je pokazan jedan način određivanja tih koeficijenata. Također su pomoću koeficijenata podatnosti, odnosno matrice podatnosti izračunavani ukupni poopćeni pomaci. Koeficijenti podatnosti kao i ukupni poopćeni pomaci mogu se izračunavati i na drugi način primjenom drugoga Castiglianova teorema.

U ovom poglavlju navest će se prvi i drugi Castiglianov teorem bez izvođenja [1], [2] i [3].

Prvi Castiglianov teorem glasi:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (3.1)$$

tj. ako je konstrukcija linearno-elastična (materijal konstrukcije također je linearno-elastičan), onda je parcijalna derivacija potencijalne energije deformiranosti po bilo kojem poopćenom pomaku q_i jednaka poopćenom sili Q_i koja djeluje u pravcu i smjeru toga pomaka.

Drugi Castiglianov teorem glasi:

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}, \quad (3.2)$$

tj. ako je deformabilno tijelo linearno-elastično, onda je parcijalna derivacija potencijalne energije deformiranosti po bilo kojoj poopćenom sili Q_i jednaka odgovarajućem poopćenom pomaku q_i .

Ovaj teorem prvi je izveo talijanski inženjer *Alberto Castigliano* (1847. – 1884.) godine 1873. te odatle i naziv drugi Castiglianov teorem.

Ako je poopćena sila, sila u užem smislu riječi, onda poopćeni pomak ima smisao linearnog pomaka u pravcu djelovanja sile. Ako poopćena sila ima smisao sprega sila, poopćeni pomak bit će kutni pomak oko osi oko koje djeluje spreg sila.

Izuzetno je značenje drugoga Castiglianova teorema u teoriji konstrukcija. Poznavajući izraz za potencijalnu energiju deformiranosti u nekoj konstrukciji, navedeni teorem omogućuje izračunavanje bilo linearnog bilo kutnog pomaka bilo koje točke konstrukcije u bilo kojem smjeru.

U primjerima koji slijede objasnit će se primjena drugoga Castiglianova teorema pri određivanju linearnih pomaka za aksijalno opterećene štapove, primjena navedenog teorema u određivanju horizontalnih i vertikalnih pomaka čvorova ravninskih rešetkastih nosača, kutnih zakreta poprečnih presjeka štapova opterećenih na uvijanje te progiba i nagiba linijskih i okvirnih nosača.

Također, drugi Castiglianov teorem omogućuje i rješavanje statički neodređenih zadataka, što će biti pokazano na nekoliko primjera za slučaj aksijalno opterećenog štapa te štapa opterećenoga na uvijanje i savijanje.

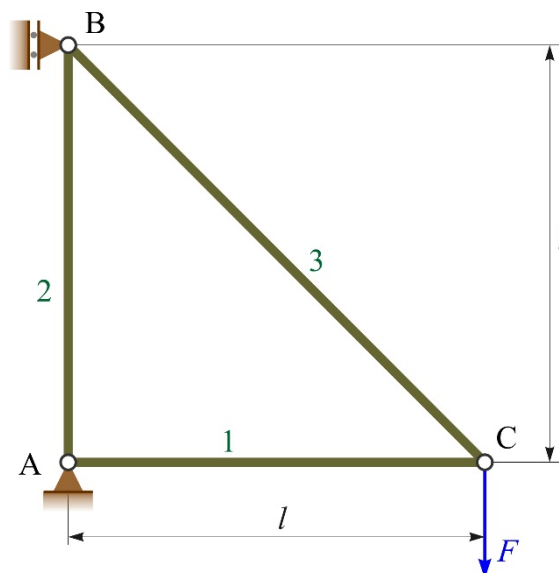
3.1. STATIČKI ODREĐENI ZADATCI

3.1.1. Aksijalno opterećenje

Primjer 3.1.

Jednostavna rešetkasta konstrukcija opterećena je koncentriranom silom iznosa F u čvoru C kako je prikazano na slici 3.1. Primjenom drugoga Castiglianova teorema valja odrediti horizontalni i vertikalni pomak čvora C.

Zadano je: F , l , A , E .



Slika 3.1. Primjer 3.1.

Rješenje:

Prema drugome Castiglianovu teoremu (3.2) poopćeni pomak neke točke može se dobiti kao

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i},$$

tj. parcijalna derivacija energije deformiranosti po poopćenoj sili jednaka je poopćenom pomaku koji odgovara toj poopćenoj sili.

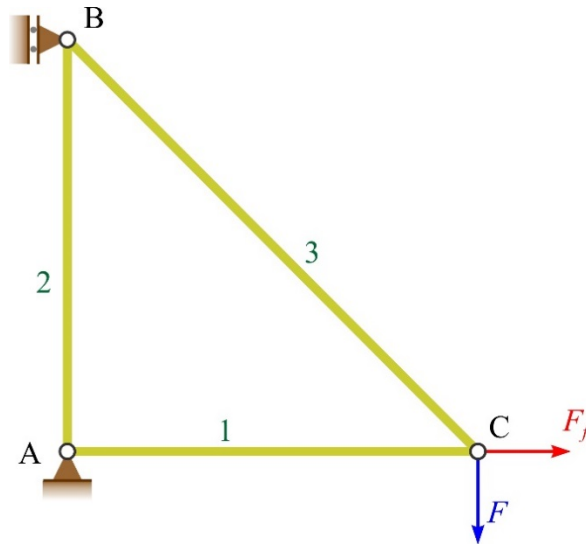
Pri aksijalnom opterećenju energija elastične deformiranosti računa se prema:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i},$$

pa se bilo koji poopćeni pomak može dobiti pomoću izraza:

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i} = \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial Q_i} l_i}{2 \cdot A_i \cdot E_i} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial Q_i} l_i}{A_i \cdot E_i}.$$

Budući da za horizontalni pomak čvora C ne postoji odgovarajuća poopćena sila, potrebno je u čvoru C dodati fiktivnu silu F_f kako je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2. *Primjer 3.1.*

Traženi pomaci mogu se sada dobiti prema:

$$h_c = \frac{\partial U}{\partial F_f} = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_f} l_i, \quad v_c = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F} l_i,$$

s obzirom na to da svi štapovi imaju istu aksijalnu krutost $A \cdot E$.

Ako se vrijednosti ovih pomaka dobiju kao pozitivne, **pomaci su u smjeru odgovarajućih poopćenih sila.**

Uzdužne sile N_i u štapovima mogu se dobiti metodom čvorova na način opisan u poglavlju o unutarnjim silama. Iznosi uzdužnih sila N_i u ovisnosti o silama F i F_f , kao i njihove parcijalne derivacije te duljine štapova, dane su u tablici 3.1. Nakon što se izračunaju parcijalne derivacije, može se uzeti da je $F_f = 0$.

Tablica 3.1. Uzdužne sile u štapovima i njihove parcijalne derivacije

Štap	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial F_f}$	$\frac{\partial N_i}{\partial F}$	N_i uz $F_f = 0$	l_i
1	$-F + F_f$	1	-1	$-F$	l
2	$-F$	0	-1	$-F$	l
3	$\sqrt{2} \cdot F$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} \cdot F$	$\sqrt{2} \cdot l$

Dalje je:

$$h_C = \frac{1}{A \cdot E} \cdot (-F \cdot 1 \cdot l - F \cdot 0 \cdot l + \sqrt{2} \cdot F \cdot \sqrt{2} \cdot l \cdot 0) = -\frac{F \cdot l}{A \cdot E},$$

$$v_C = \frac{1}{A \cdot E} \cdot [-F \cdot (-1) \cdot l - F \cdot (-1) \cdot l + \sqrt{2} \cdot F \cdot \sqrt{2} \cdot l \cdot 1] = (2 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E}.$$

Za vrijednosti $F = 10 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $A = 100 \text{ mm}^2$ i $E = 210 \text{ GPa}$ traženi pomaci iznose:

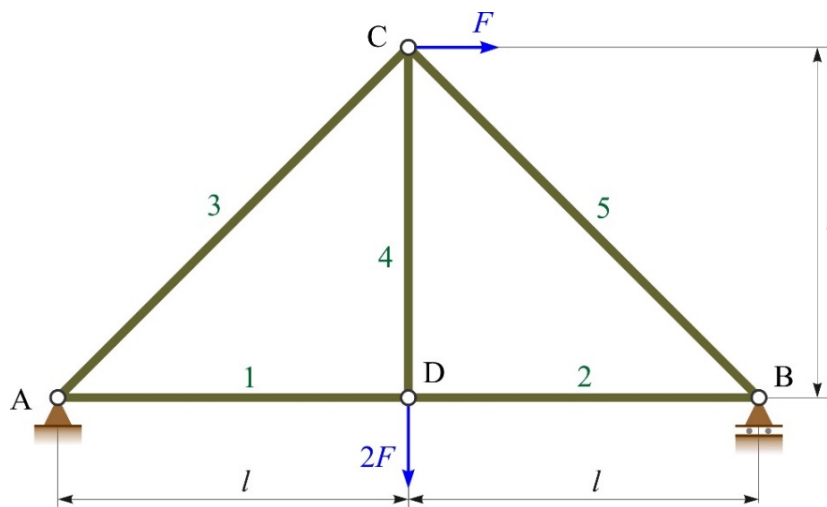
$$h_C = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{100 \cdot 210 \cdot 10^3} = -0,476 \text{ mm}; \quad v_C = 4,828 \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{100 \cdot 210 \cdot 10^3} = 2,299 \text{ mm}.$$

Horizontalni pomak točke C suprotnog je smjera od smjera dodane fiktivne sile F_f , dok je vertikalni pomak točke C istog smjera kao i smjer zadane sile F .

Primjer 3.2.

Za rešetkastu konstrukciju zadanu i opterećenu prema slici 3.3. potrebno je primjenom drugoga Castiglianova teorema odrediti horizontalni pomak čvora C i vertikalni pomak čvora D.

Zadano je: F , l , A , E .



Slika 3.3. Primjer 3.2.

Rješenje:

Uvjet za primjenu drugoga Castiglianova teorema jest označivanje sile u čvoru C s F_1 , a sile u čvoru D s F_2 , kako je to prikazano na slici 3.4.

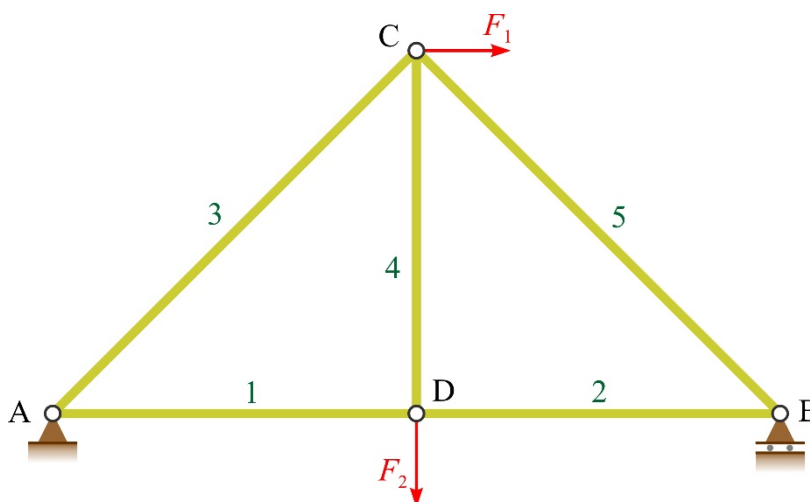
Sada se traženi pomaci mogu dobiti prema:

$$h_C = \frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_1} \cdot l_i, \quad v_D = \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_2} \cdot l_i.$$

Iz uvjeta ravnoteže postavljenih za rešetku kao ravninsku konstrukciju mogu se dobiti reakcije oslonaca u funkciji sila F_1 i F_2 koje iznose:

$$F_{Ax} = -F_1, \quad F_{Ay} = -\frac{1}{2} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2, \quad F_B = \frac{1}{2} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2.$$

Metodom čvorova određuju se sile u svim štapovima rešetkastog nosača također u funkciji sila F_1 i F_2 . Ove sile, kao i njihove potrebne parcijalne derivacije te duljine štapova, prikazane su u tablici 3.2.



Slika 3.4. Primjer 3.2.

Tablica 3.2. Uzdužne sile u štapovima, njihove parcijalne derivacije i duljine štapova

Štap	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial F_1}$	$\frac{\partial N_i}{\partial F_2}$	N_i uz $F_1 = F, F_2 = 2 \cdot F$	l_i
1	$\frac{1}{2} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} \cdot F$	l
2	$\frac{1}{2} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} \cdot F$	l
3	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F$	$\sqrt{2} \cdot l$
4	F_2	0	1	$2 \cdot F$	l
5	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot F$	$\sqrt{2} \cdot l$

Traženi pomaci su:

$$h_c = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{3}{2} \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot l - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot l + 2 \cdot F \cdot 0 \cdot l - \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot F \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot l \right),$$

$$h_C = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E}$$

$$v_D = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{3}{2} \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot F \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot l + 2 \cdot F \cdot 1 \cdot l + \right. \\ \left. + \frac{-3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot F \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot l \right),$$

$$v_D = \left(\frac{7}{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E}.$$

Za vrijednosti zadanih veličina

$$F = 5 \text{ kN}, l = 1,5 \text{ m}, A = 64 \text{ mm}^2 \text{ i } E = 210 \text{ GPa}$$

traženi pomaci iznose:

$$h_C = 2,914 \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{64 \cdot 210 \cdot 10^3} = 1,626 \text{ mm};$$

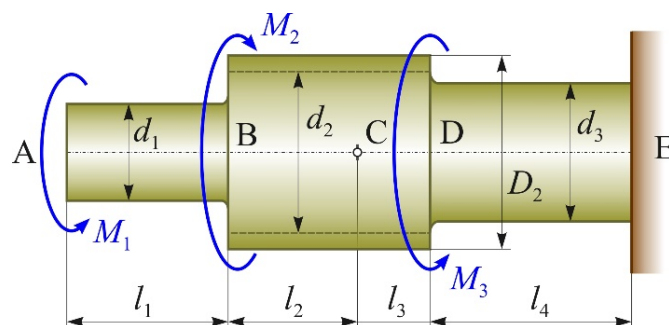
$$v_D = 6,328 \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{64 \cdot 210 \cdot 10^3} = 3,531 \text{ mm}.$$

3.1.2. Uvijanje

Primjer 3.3.

Štap okrugloga poprečnog presjeka opterećen je trima koncentriranim momentima (slika 3.5.). Valja odrediti kutni zakret presjeka C primjenom drugoga Castiglianova teorema.

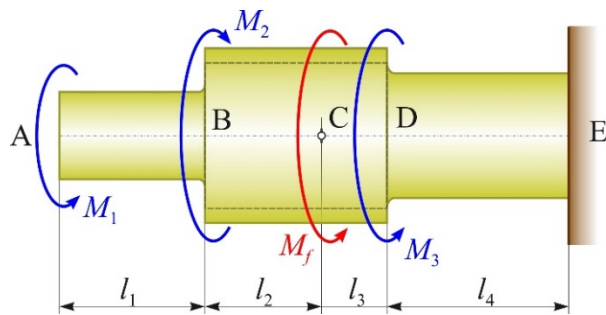
Zadano je: $l_1 = l$, $l_2 = 0,75 \cdot l$, $l_3 = 0,5 \cdot l$, $l_4 = 2 \cdot l$, $d_1 = d$, $D_2 = 2 \cdot d$, $d_2 = 1,6 \cdot d$, $d_3 = 1,4 \cdot d$, $M_1 = M$, $M_2 = 3 \cdot M$, $M_3 = 3,5 \cdot M$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Slika 3.5. Primjer 3.3.

Rješenje:

Budući da u C nema poopćene sile koja odgovara poopćenom pomaku, potrebno je u C dodati fiktivni moment M_f koji je poopćena sila za traženi kutni zakret α_C (slika 3.6.).



Slika 3.6. Primjer 3.3.

Kutni zakret presjeka C sada je:

$$\alpha_c = \frac{\partial U}{\partial M_f} = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ti} \cdot \frac{\partial M_{ti}}{\partial M_f} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}$$

Momenti uvijanja po područjima nosača i odgovarajuće parcijalne derivacije jesu:

- I. područje: $0 \leq x \leq l$

$$M_{t1} = -M_1 = -M, \quad \frac{\partial M_{t1}}{\partial M_f} = 0;$$

- II. područje: $l \leq x \leq 1,75 \cdot l$

$$M_{t2} = -M_1 + M_2 = -M + 3 \cdot M = 2 \cdot M, \quad \frac{\partial M_{t2}}{\partial M_f} = 0;$$

- III. područje: $1,75 \cdot l \leq x \leq 2,25 \cdot l$

$$M_{t3} = -M_1 + M_2 - M_f = -M + 3 \cdot M - M_f = 2 \cdot M - M_f, \quad \frac{\partial M_{t3}}{\partial M_f} = -1;$$

- IV. područje: $2,25 \cdot l \leq x \leq 4,25 \cdot l$

$$M_{t4} = -M_1 + M_2 - M_f + M_3 = -M + 3 \cdot M - M_f - 3,5 \cdot M = -1,5 \cdot M - M_f,$$

$$\frac{\partial M_{t4}}{\partial M_f} = -1.$$

Sada je traženi kutni zakret:

$$\alpha_c = \frac{\partial U}{\partial M_f} = \frac{1}{G \cdot I_{p2}} \cdot \left(M_{t3} \cdot \frac{\partial M_{t3}}{\partial M_f} \cdot l_3 \right) + \frac{1}{G \cdot I_{p3}} \cdot \left(M_{t4} \cdot \frac{\partial M_{t4}}{\partial M_f} \cdot l_4 \right),$$

gdje su polarni momenti tromosti poprečnih presjeka drugog i trećeg segmenta štapa:

$$I_{p2} = \frac{\pi \cdot D_2^4}{32} - \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^4}{32} - \frac{\pi \cdot (1,6 \cdot d)^4}{32} = 0,9274 \cdot d^4$$

$$I_{p3} = \frac{\pi \cdot (1,4 \cdot d)^4}{32} = 0,3771 \cdot d^4.$$

Dalje je:

$$\alpha_C = \frac{1}{G \cdot I_{p2}} \cdot [2 \cdot M \cdot (-1) \cdot 0,5 \cdot l] + \frac{1}{G \cdot I_{p3}} \cdot [-1,5 \cdot M \cdot (-1) \cdot 2 \cdot l]$$

$$\alpha_C = \frac{-M \cdot l}{G \cdot I_{p2}} + \frac{3 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{p3}} = \frac{-M \cdot l}{G \cdot 0,9274 \cdot d^4} + \frac{3 \cdot M \cdot l}{G \cdot 0,3771 \cdot d^4} = 6,8772 \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot d^4}.$$

Za vrijednosti zadanih veličina $M = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $d = 50 \text{ mm}$ i $G = 80 \text{ GPa}$ traženi kutni zakret jest:

$$\alpha_C = 6,8772 \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot d^4} = 6,8772 \cdot \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot 50^4},$$

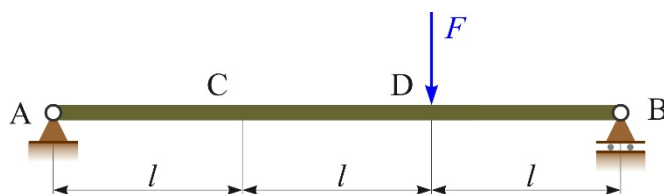
$$\alpha_C = 0,0330 \text{ rad}.$$

3.1.3. Savijanje

Primjer 3.4.

Za linijski nosač zadan i opterećen prema slici 3.7. valja odrediti progib točke C i kut zakreta elastične linije (nagib) u D primjenom drugoga Castiglianova teorema.

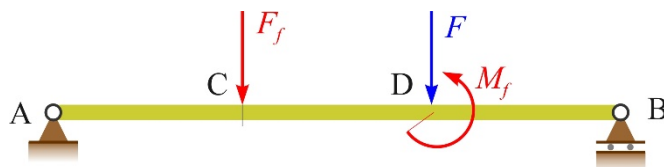
Zadano je: F , l , I_y , E .



Slika 3.7. Primjer 3.4.

Rješenje:

Kako u C i D nema popoćenih sila koje odgovaraju traženim popoćenim pomacima (progib u C i nagib u D), potrebno je najprije u C dodati fiktivnu silu F_f , a u D fiktivni moment M_f , kao što je prikazano na slici 3.8.



Slika 3.8. Primjer 3.4.

Progib u C i nagib u D računaju se prema:

$$w_C = \frac{\partial U}{\partial F_f} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{yi} \cdot \frac{\partial M_{yi}}{\partial F_f}}{E \cdot I_{yi}} \cdot dx, \quad \beta_D = \frac{\partial U}{\partial M_f} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{yi} \cdot \frac{\partial M_{yi}}{\partial M_f}}{E \cdot I_{yi}} \cdot dx.$$

Reakcija oslonca A dobivena iz uvjeta ravnoteže glasi:

$$F_A = \frac{2}{3} \cdot F_f + \frac{1}{3} \cdot \frac{M_f}{l} + \frac{1}{3} \cdot F.$$

Momenti savijanja po područjima nosača i odgovarajuće parcijalne derivacije jesu:

- *I. područje:* $0 \leq x \leq l$

$$M_{y1} = F_A \cdot x = \frac{2}{3} \cdot F_f \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{M_f}{l} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot F \cdot x,$$

$$\frac{\partial M_{y1}}{\partial F_f} = \frac{2}{3} \cdot x, \quad \frac{\partial M_{y1}}{\partial M_f} = \frac{1}{3 \cdot l} \cdot x, \quad M_{y1} = \frac{1}{3} \cdot F \cdot x$$

- *II. područje:* $l \leq x \leq 2 \cdot l$

$$M_{y2} = F_A \cdot x - F_f \cdot (x - l) = \frac{2}{3} \cdot F_f \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{M_f}{l} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot F \cdot x - F_f \cdot x + F_f \cdot l,$$

$$M_{y2} = -\frac{1}{3} \cdot F_f \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{M_f}{l} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot F \cdot x + F_f \cdot l;$$

$$\frac{\partial M_{y2}}{\partial F_f} = -\frac{1}{3} \cdot x + l, \quad \frac{\partial M_{y2}}{\partial M_f} = \frac{1}{3 \cdot l} \cdot x, \quad M_{y2} = \frac{1}{3} \cdot F \cdot x;$$

- *III. područje:* $2 \cdot l \leq x \leq 3 \cdot l$

$$M_{y3} = F_A \cdot x - F_f \cdot (x - l) - M_f - F \cdot (x - 2 \cdot l);$$

$$M_{y3} = \frac{2}{3} \cdot F_f \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{M_f}{l} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot F \cdot x - F_f \cdot x + F_f \cdot l - M_f - F \cdot x + 2 \cdot F \cdot l$$

$$\frac{\partial M_{y3}}{\partial F_f} = -\frac{1}{3} \cdot x + l; \quad \frac{\partial M_{y3}}{\partial M_f} = \frac{1}{3 \cdot l} \cdot x - 1; \quad M_{y3} = -\frac{2}{3} \cdot F \cdot x + 2 \cdot F \cdot l.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u

$$w_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\int_0^l M_{y1} \cdot \frac{\partial M_{y1}}{\partial F_f} \cdot dx + \int_l^{2l} M_{y2} \cdot \frac{\partial M_{y2}}{\partial F_f} \cdot dx + \int_{2l}^{3l} M_{y3} \cdot \frac{\partial M_{y3}}{\partial F_f} \cdot dx \right) i$$

$$\beta_D = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\int_0^l M_{y1} \cdot \frac{\partial M_{y1}}{\partial M_f} \cdot dx + \int_l^{2l} M_{y2} \cdot \frac{\partial M_{y2}}{\partial M_f} \cdot dx + \int_{2l}^{3l} M_{y3} \cdot \frac{\partial M_{y3}}{\partial M_f} \cdot dx \right)$$

može se dobiti:

$$w_C = \frac{7}{18} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y}; \quad \beta_D = \frac{2}{9} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y}.$$

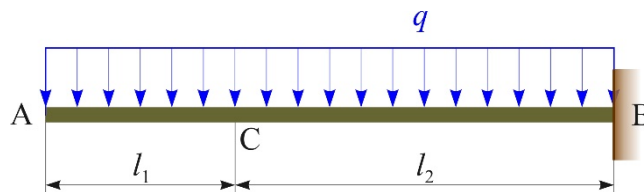
Za vrijednosti $F = 10 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$ i pravokutni poprečni presjek nosača dimenzija $40 \times 80 \text{ mm}$ kojemu je aksijalni moment tromosti $I_y = 1,707 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ progib i nagib iznose:

$$w_C = \frac{7}{18} \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (1 \cdot 10^3)^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 1,707 \cdot 10^6} = 10,85 \text{ mm};$$

$$\beta_D = \frac{2}{9} \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{210 \cdot 10^3 \cdot 1,707 \cdot 10^6} = 0,0062 \text{ rad}.$$

Primjer 3.5.

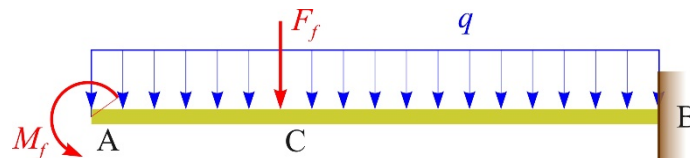
Primjenom drugoga Castiglianova teorema valja odrediti nagib u A i progib u C za linijski nosač zadan i opterećen prema slici 3.9. Zadano je: q , l , I_y , E , $l_1 = l$, $l_2 = 2 \cdot l$.



Slika 3.9. Primjer 3.5.

Rješenje:

U A i C nema poopcenih sila koje odgovaraju traženim poopcenim pomacima (nagib u A i progib u C) pa je potrebno u A dodati fiktivni moment M_f , a u C fiktivnu silu F_f , kao što je prikazano na slici 3.10.



Slika 3.10. Primjer 3.5.

Nagib u A i progib u C računaju se prema:

$$\beta_A = \frac{\partial U}{\partial M_f} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}}{E \cdot I_{yi}} \cdot \frac{\partial M_{yi}}{\partial M_f} \cdot dx; \quad w_C = \frac{\partial U}{\partial F_f} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}}{E \cdot I_{yi}} \cdot \frac{\partial M_{yi}}{\partial F_f} \cdot dx.$$

Momenti savijanja po područjima nosača i odgovarajuće parcijalne derivacije jesu:

- I. područje: $0 \leq x \leq l_1$

$$M_{y1} = -q \cdot \frac{x^2}{2} - M_f, \quad \frac{\partial M_{y1}}{\partial M_f} = -1, \quad \frac{\partial M_{y1}}{\partial F_f} = 0, \quad M_{y1} = -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

- II. područje: $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$

$$M_{y2} = -q \cdot \frac{x^2}{2} - M_f - F_f \cdot (x - l_1), \quad \frac{\partial M_{y2}}{\partial M_f} = -1, \quad \frac{\partial M_{y2}}{\partial F_f} = l_1 - x, \quad M_{y2} = -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza uz $l_1 = l$ i $l_2 = 2 \cdot l$ u izraze:

$$\beta_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\int_0^{l_1} M_{y1} \cdot \frac{\partial M_{y1}}{\partial M_f} \cdot dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} M_{y2} \cdot \frac{\partial M_{y2}}{\partial M_f} \cdot dx \right) \text{ i}$$

$$w_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\int_0^{l_1} M_{y1} \cdot \frac{\partial M_{y1}}{\partial F_f} \cdot dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} M_{y2} \cdot \frac{\partial M_{y2}}{\partial F_f} \cdot dx \right)$$

može se dobiti:

$$\beta_A = \frac{9}{2} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y};$$

$$w_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_l^{3l} -q \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (l - x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{E \cdot I_y} \cdot \left[-l \cdot \left(9 \cdot l^3 - \frac{l^3}{3} \right) + \left(\frac{81 \cdot l^4}{4} - \frac{l^4}{4} \right) \right]$$

$$w_C = \frac{17}{3} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}.$$

Za vrijednosti $q = 8 \text{ kN/m}$, $l = 0,6 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$ i pravokutni poprečni presjek nosača dimenzija $60 \times 100 \text{ mm}$ kojemu je aksijalni moment tromosti $I_y = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ nagib i progib iznose:

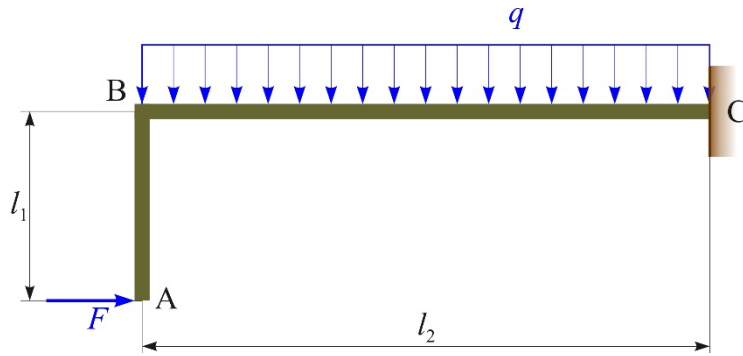
$$\beta_A = \frac{9}{2} \cdot \frac{8 \cdot (0,6 \cdot 10^3)^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^6} = 0,0074 \text{ rad};$$

$$w_C = \frac{17}{3} \cdot \frac{8 \cdot (0,6 \cdot 10^3)^4}{210 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^6} = 5,6 \text{ mm}.$$

Primjer 3.6.

Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici 3.11. Primjenom drugoga Castiglianova teorema treba odrediti nagib u A i progib u B.

Zadano je: q , l , E , I_y , $F = 3 \cdot q \cdot l$, $l_1 = l$, $l_2 = 3 \cdot l$.



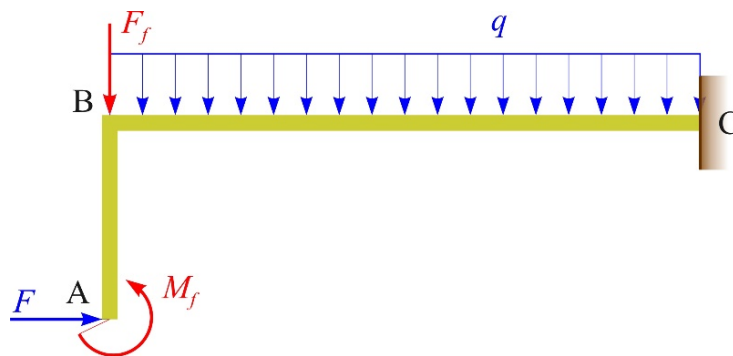
Slika 3.11. *Primjer 3.6.*

Rješenje:

Potrebno je najprije u A i B dodati odgovarajuće poopćene sile fiktivni moment M_f i fiktivnu silu F_f koje odgovaraju traženim poopćenim pomacima (nagib u A i progib u B), kao što je prikazano na slici 3.12.

Nagib u A i progib u B računaju se prema:

$$\beta_A = \frac{\partial U}{\partial M_f} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{yi} \cdot \frac{\partial M_{yi}}{\partial M_f}}{E \cdot I_{yi}} \cdot dx; \quad w_B = \frac{\partial U}{\partial F_f} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{M_{yi} \cdot \frac{\partial M_{yi}}{\partial F_f}}{E \cdot I_{yi}} \cdot dx.$$



Slika 3.12. *Primjer 3.6.*

Momenti savijanja po područjima nosača i odgovarajuće parcijalne derivacije jesu:

- I. područje: $0 \leq x \leq l$

$$M_{y1} = -F \cdot x - M_f, \quad \frac{\partial M_{y1}}{\partial M_f} = -1, \quad \frac{\partial M_{y1}}{\partial F_f} = 0, \quad M_{y1} = -F \cdot x = -3 \cdot q \cdot l \cdot x$$

- II. područje: $0 \leq x \leq 3 \cdot l$

$$M_{y2} = -F \cdot l - M_f - q \cdot \frac{x^2}{2} - F_f \cdot x, \quad \frac{\partial M_{y2}}{\partial M_f} = -1, \quad \frac{\partial M_{y2}}{\partial F_f} = -x,$$

$$M_{y2} = -3 \cdot q \cdot l^2 - q \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Dalje je:

$$\beta_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\int_0^l -3 \cdot q \cdot l \cdot x \cdot (-1) \cdot dx + \int_0^{3l} \left(-3 \cdot q \cdot l^2 - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot (-1) \cdot dx \right] = 15 \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y},$$

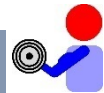
$$w_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_0^{3l} \left(-3 \cdot q \cdot l^2 - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot (-x) \cdot dx = \frac{189}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}.$$

Za vrijednosti $q = 4 \text{ kN/m}$, $l = 0,8 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$ i kvadratni poprečni presjek nosača dimenzija $90 \times 90 \text{ mm}$ kojemu je aksijalni moment tromosti $I_y = 5,468 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ nagib i progib iznose:

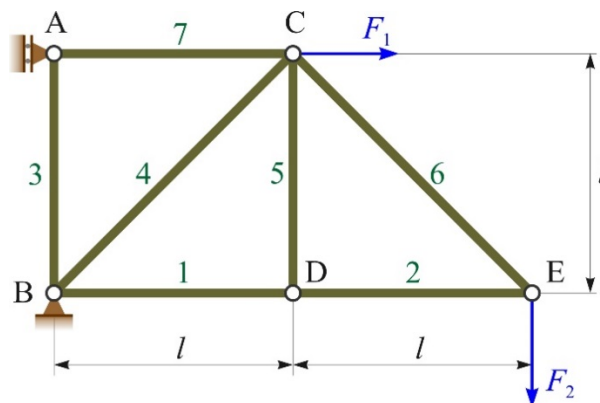
$$\beta_A = 15 \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} = 15 \cdot \frac{4 \cdot (0,8 \cdot 10^3)^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 5,468 \cdot 10^6} = 0,0268 \text{ rad},$$

$$w_B = \frac{189}{8} \cdot \frac{4 \cdot (0,8 \cdot 10^3)^4}{210 \cdot 10^3 \cdot 5,468 \cdot 10^6} = 33,7 \text{ mm}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



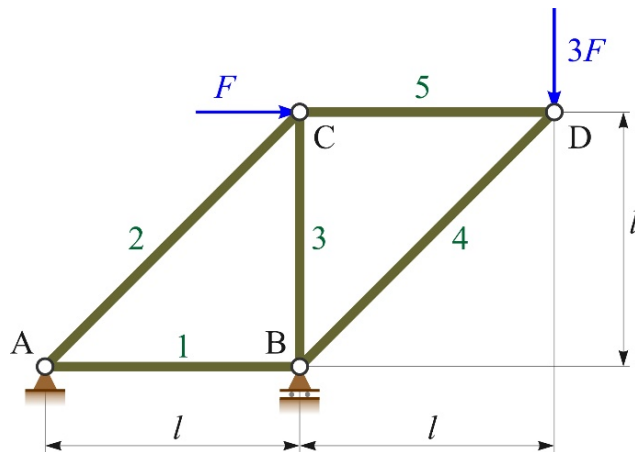
Zadatak 3.1. Za rešetkastu konstrukciju zadanu i opterećenu prema slici Z.3.1. potrebno je primjenom drugoga Castiglianova teorema izračunati horizontalni pomak čvora C i vertikalni pomak čvora E. Zadano: $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$, $l = 2,5 \text{ m}$, $A = 144 \text{ mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$.



Slika Z.3.1. Zadatak 3.1.

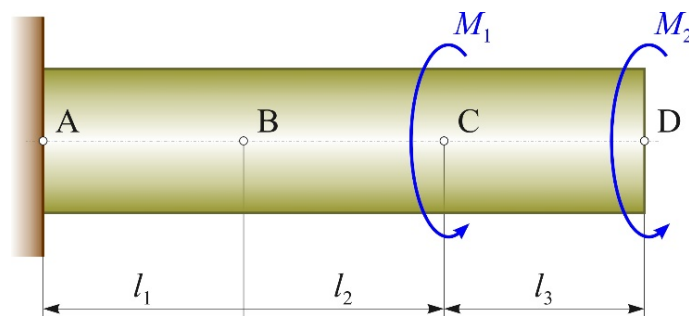
Zadatak 3.2. Rešetkasta konstrukcija zadanu je i opterećena prema slici Z.3.2. Valja izračunati pomoću drugoga Castiglianova teorema vertikalni pomak čvora D izražen preko zadanih veličina F , l , A i E .

Navedeni pomak potrebno je izračunati u milimetrima ako su ulazne veličine zadane kako slijedi: $F = 25 \text{ kN}$, $l = 3 \text{ m}$, $A = 900 \text{ mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$.



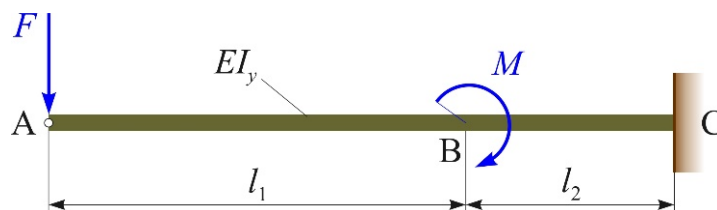
Slika Z.3.2. *Zadatak 3.2.*

Zadatak 3.3. Za štap zadan i opterećen na uvijanje prema slici Z.3.3. potrebno je odrediti pomoću drugoga Castiglianova teorema kutni zakret presjeka B. Zadano je: $M_1 = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 45 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l_1 = 0,8 \text{ m}$, $l_2 = 0,8 \text{ m}$, $l_3 = 0,8 \text{ m}$, $d = 160 \text{ mm}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Slika Z.3.3. *Zadatak 3.3.*

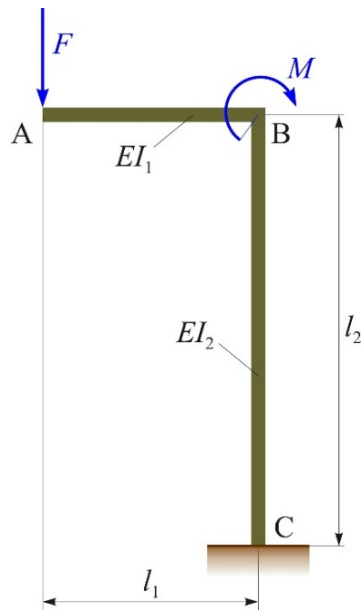
Zadatak 3.4. Za linijski nosač zadan i opterećenu prema slici Z.3.4. valja primjenom drugoga Castiglianova teorema odrediti progib i nagib u A te progib u B. Zadano je: $F = 15 \text{ kN}$, $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 0,6 \text{ m}$, $I_y = 8,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $E = 210 \text{ GPa}$, $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$.



Slika Z.3.4. *Zadatak 3.4.*

Zadatak 3.5. Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici Z.3.5. Valja odrediti primjenom drugoga Castiglianova teorema vertikalni pomak točke A i kutni zakret u B.

Zadano je: $F = 12 \text{ kN}$, $M = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 1,2 \text{ m}$, $I_y = 12,96 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $E = 69 \text{ GPa}$, $l_1 = l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $I_1 = I_y$, $I_2 = 2 \cdot I_y$.



Slika Z.3.5. Zadatak 3.5.

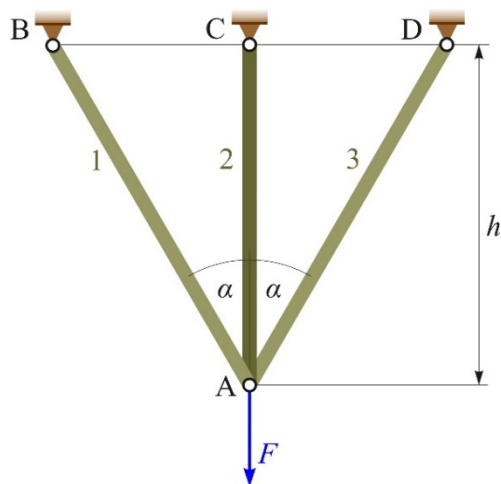
3.2. STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI

3.2.1. Aksijalno opterećenje

Primjer 3.7.

Konstrukcija sastavljena od triju štapova zadana je i opterećena prema slici 3.13. Primjenom drugoga Castiglianova teorema treba odrediti sile u štapovima.

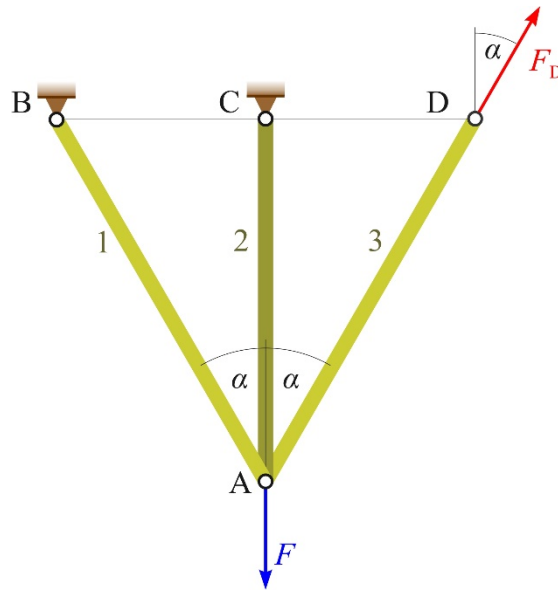
Zadano je: F , h , A , E , α .



Slika 3.13. Primjer 3.7.

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen pa je uz uvjete ravnoteže potrebno napisati dodatnu jednačinu. Ekvivalentna osnovna konstrukcija može se dobiti uklanjanjem jedne suvišne veze, a jedna od mogućnosti prikazana je na slici 3.14.



Slika 3.14. *Primjer 3.7.*

Dodatna jednačba može se napisati u obliku:

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial F_D} = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_D} \cdot l_i = 0.$$

Iz uvjeta ravnoteže dobije se:

$$F_B = F_D; \quad F_C = F - 2 \cdot F_D \cdot \cos \alpha,$$

pa su uzdužne sile u štapovima i odgovarajuće parcijalne derivacije:

$$N_1 = F_B = F_D, \quad \frac{\partial N_1}{\partial F_D} = 1; \quad N_2 = F_C = F - 2 \cdot F_D \cdot \cos \alpha; \quad \frac{\partial N_2}{\partial F_D} = -2 \cdot \cos \alpha;$$

$$N_3 = F_D, \quad \frac{\partial N_3}{\partial F_D} = 1.$$

Dalje je:

$$\delta_D = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \left(N_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_D} \cdot l_1 + N_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial F_D} \cdot l_2 + N_3 \cdot \frac{\partial N_3}{\partial F_D} \cdot l_3 \right) = 0,$$

odnosno

$$F_D \cdot 1 \cdot \frac{h}{\cos \alpha} + (F - 2 \cdot F_D \cdot \cos \alpha) \cdot (-2 \cdot \cos \alpha) \cdot h + F_D \cdot 1 \cdot \frac{h}{\cos \alpha} = 0,$$

$$F_D = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha} \cdot F.$$

Uzdužne sile u štapovima sada su:

$$N_1 = N_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha} \cdot F; \quad N_2 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha} \cdot F.$$

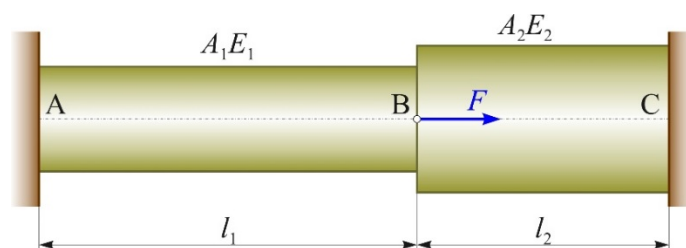
Ako se uzmu vrijednosti $F = 5 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, uzdužne sile iznose:

$$N_1 = N_3 = \frac{\cos^2 30^\circ}{1 + 2 \cdot \cos^3 30^\circ} \cdot 5 = 1,631 \text{ kN}; \quad N_2 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \cos^3 30^\circ} \cdot 5 = 2,175 \text{ kN}.$$

Primjer 3.8.

Štap sastavljen od dvaju segmenata opterećen je koncentriranom silom F prema slici 3.15. Valja odrediti reakcijske sile u A i C primjenom drugoga Castiglianova teorema.

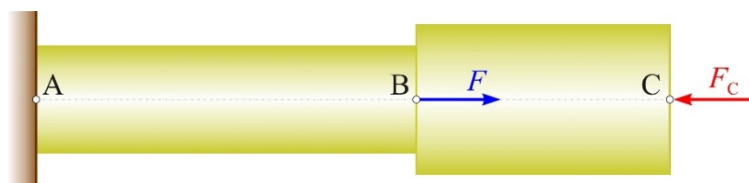
Zadano je: $A_1 = A$, $A_2 = 1,5 \cdot A$, $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$, $E_1 = 2 \cdot E$, $E_2 = E$, F .



Slika 3.15. *Primjer 3.8.*

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen pa je uz uvjete ravnoteže potrebno napisati dodatnu jednadžbu. Ekvivalentna osnovna konstrukcija može se dobiti uklanjanjem jedne suvišne veze, kao što je prikazano na slici 3.16.



Slika 3.16. *Primjer 3.8.*

Dodatna jednadžba može se napisati u obliku:

$$u_C = \frac{\partial U}{\partial F_C} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{A \cdot E} \cdot N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_C} \cdot l_i = 0.$$

Uzdužne sile i odgovarajuće parcijalne derivacije su:

$$N_1 = F - F_C, \quad \frac{\partial N_1}{\partial F_C} = -1; \quad N_2 = -F_C; \quad \frac{\partial N_2}{\partial F_C} = -1.$$

Dalje je:

$$u_C = \frac{1}{A_1 \cdot E_1} \cdot N_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_C} \cdot l_1 + \frac{1}{A_2 \cdot E_2} \cdot N_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial F_C} \cdot l_2 = 0,$$

$$\frac{1}{A \cdot 2 \cdot E} \cdot (F - F_C) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot l + \frac{1}{1,5 \cdot A \cdot E} \cdot (-F_C) \cdot (-1) \cdot l = 0.$$

Iz gornje jednačbe može se dobiti uz $F = 15 \text{ kN}$:

$$F_C = \frac{3}{5} \cdot F = F_C = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9 \text{ kN},$$

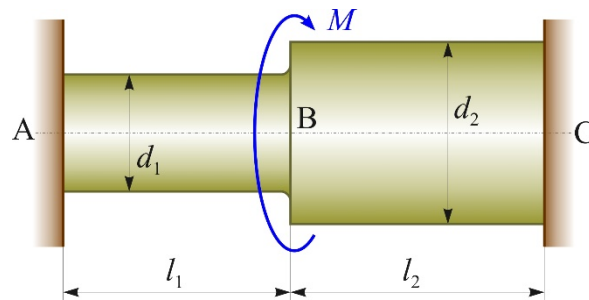
a iz uvjeta ravnoteže:

$$F_A = F - F_C = 15 - 9 = 6 \text{ kN}.$$

3.2.2. Uvijanje

Primjer 3.9.

Štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata vezan je za podlogu na svojim krajevima te opterećen koncentriranim momentom iznosa M prema slici 3.17. Valja odrediti reakcijske momente u A i C. Zadano je: $l_1 = l$, $l_2 = 1,5 \cdot l$, $d_1 = d$, $d_2 = 1,4 \cdot d$, M , $G_1 = G_2 = G$.

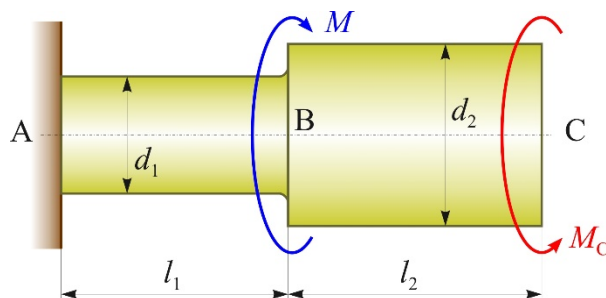


Slika 3.17. Primjer 3.9.

Rješenje:

Budući da je zadatak jedanput statički neodređen, uz uvjet ravnoteže potrebno je napisati i dodatnu jednačbu. Ekvivalentna osnovna konstrukcija može se dobiti uklanjanjem jedne suvišne veze, kao što je prikazano na slici 3.18., pa u skladu s tim dodatna jednačba glasi:

$$\alpha_C = \frac{\partial U}{\partial M_C} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{I_{pi} \cdot G_i} \cdot M_{ti} \cdot \frac{\partial M_{ti}}{\partial M_C} \cdot l_i = 0.$$



Slika 3.18. Primjer 3.9.

Momenti uvijanja i odgovarajuće parcijalne derivacije iznose:

$$M_{t1} = M_C - M, \quad \frac{\partial M_{t1}}{\partial M_C} = 1; \quad M_{t2} = M_C; \quad \frac{\partial M_{t2}}{\partial M_C} = 1.$$

Dalje je:

$$\alpha_C = \frac{1}{I_{p1} \cdot G_1} \cdot M_{t1} \cdot \frac{\partial M_{t1}}{\partial M_C} \cdot l_1 + \frac{1}{I_{p2} \cdot G_2} \cdot M_{t2} \cdot \frac{\partial M_{t2}}{\partial M_C} \cdot l_2 = 0,$$

$$\frac{1}{I_{p1} \cdot G} \cdot (M_C - M) \cdot 1 \cdot l + \frac{1}{I_{p2} \cdot G} \cdot M_C \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot l = 0.$$

Iz gornje jednačbe može se dobiti uz $M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$:

$$M_C = 0,719 \cdot M = 0,719 \cdot 20 = 14,38 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

a iz uvjeta ravnoteže:

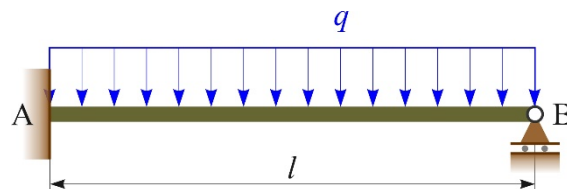
$$M_A = M - M_C = 20 - 14,38 = 5,62 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

3.2.3. Savijanje

Primjer 3.10.

Za linijski nosač zadan i opterećen prema slici 3.19. potrebno je odrediti reakcije veza.

Zadano: l, q .

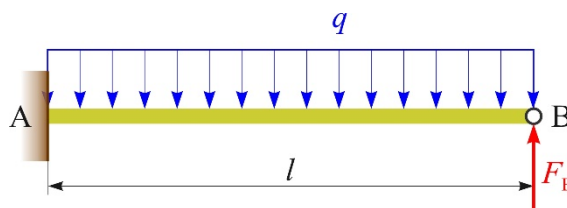


Slika 3.19. Primjer 3.10.

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen te je uz uvjete ravnoteže potrebno napisati i jednu dodatnu jednačbu. Ekvivalentni konzolni nosač može se dobiti uklanjanjem jedne suvišne veze, kao što je prikazano na slici 3.20., pa u skladu s tim dodatna jednačba glasi:

$$w_B = \frac{\partial U}{\partial F_B} = \frac{1}{I_y \cdot E} \cdot \int_0^l M_y \cdot \frac{\partial M_y}{\partial F_B} \cdot dx = 0.$$



Slika 3.20. Primjer 3.10.

Moment savijanja i odgovarajuća parcijalna derivacija glase:

$$M_y = F_B \cdot (l-x) - q \cdot \frac{(l-x)^2}{2}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial F_B} = l-x.$$

Dalje je:

$$w_B = \frac{1}{I_y \cdot E} \cdot \int_0^l \left[F_B \cdot (l-x) - q \cdot \frac{(l-x)^2}{2} \right] \cdot (l-x) dx = 0,$$

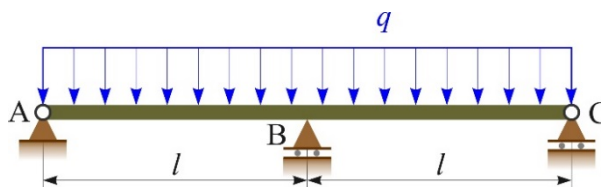
$$\int_0^l \left[F_B \cdot (l-x)^2 - q \cdot \frac{(l-x)^3}{2} \right] dx = 0, \quad F_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l.$$

Iz uvjeta ravnoteže mogu se dobiti preostale reakcije:

$$F_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l, \quad M_A = -\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2.$$

Primjer 3.11.

Za linijski nosač na trima osloncima opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem potrebno je primjenom drugoga Castiglianova teorema izračunati reakcije oslonaca. Zadano: l, q .

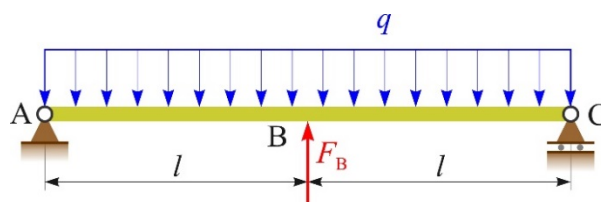


Slika 3.21. Primjer 3.11.

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen te je uz uvjete ravnoteže potrebno napisati i jednu dodatnu jednadžbu. Ekvivalentna osnovna konstrukcija može se dobiti uklanjanjem jedne suvišne veze, kao što je prikazano na slici 3.22., pa u skladu s tim i vodeći računa o simetriji dodatna jednadžba glasi:

$$w_B = \frac{\partial U}{\partial F_B} = 2 \cdot \left(\frac{1}{I_y \cdot E} \cdot \int_0^l M_y \cdot \frac{\partial M_y}{\partial F_B} \cdot dx \right) = 0.$$



Slika 3.22. Primjer 3.11.

Moment savijanja i odgovarajuća parcijalna derivacija glase:

$$M_y = F_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \left(q \cdot l - \frac{1}{2} \cdot F_B \right) \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial F_B} = -\frac{x}{2}.$$

Dakle, funkciju momenta savijanja trebalo je najprije izraziti preko vanjskog opterećenja i nepoznate reakcije F_B , pa tek nakon toga tražiti parcijalnu derivaciju po nepoznatoj sili F_B .

Dalje je:

$$\int_0^l \left[\left(q \cdot l - \frac{1}{2} \cdot F_B \right) \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right] \cdot \left(-\frac{x}{2} \right) \cdot dx = 0,$$

$$F_B = \frac{5}{4} \cdot q \cdot l.$$

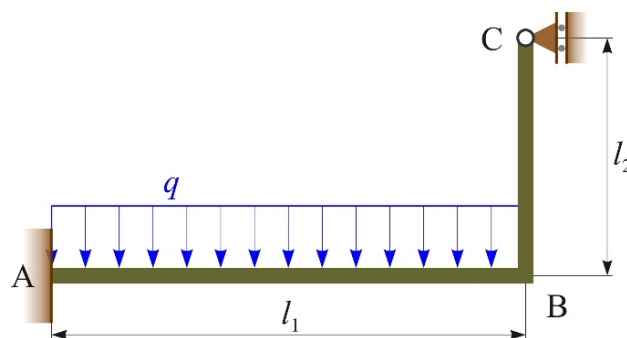
Iz uvjeta ravnoteže mogu se dobiti preostale reakcije:

$$F_A = F_C = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l.$$

Primjer 3.12.

Za okvirni nosač zadan i opterećen prema slici 3.23 potrebno je primjenom drugoga Castiglianova teorema izračunati reakcije oslonaca.

Zadano: q , l , I_y , E , $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$.



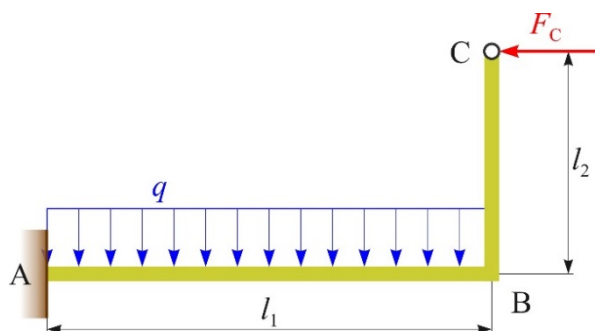
Slika 3.23. Primjer 3.12.

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen te je uz uvjete ravnoteže potrebno napisati i jednu dodatnu jednadžbu.

Ekvivalentna osnovna konstrukcija može se dobiti uklanjanjem jedne suvišne veze, kao što je prikazano slici 3.24., a dodatna jednadžba glasi:

$$h_C = \frac{\partial U}{\partial F_C} = \left(\frac{1}{I_y \cdot E} \cdot \int_0^{l_1} M_{y1} \cdot \frac{\partial M_{y1}}{\partial F_C} \cdot dx + \frac{1}{I_y \cdot E} \cdot \int_0^{l_2} M_{y2} \cdot \frac{\partial M_{y2}}{\partial F_C} \cdot dx \right) = 0.$$



Slika 3.24. Primjer 3.12.

Momenti savijanja i odgovarajuće parcijalne derivacije glase:

$$M_{y1} = F_C \cdot l_2 - q \cdot \frac{(l_1 - x)^2}{2}, \quad \frac{\partial M_{y1}}{\partial F_C} = l_2,$$

$$M_{y2} = F_C \cdot (l_2 - x), \quad \frac{\partial M_{y2}}{\partial F_C} = l_2 - x.$$

Dalje je uz $l_1 = 2 \cdot l$ i $l_2 = l$:

$$\int_0^{2l} \left[F_C \cdot l - q \cdot \frac{(2 \cdot l - x)^2}{2} \right] \cdot l \cdot dx + \int_0^l F_C \cdot (l - x) \cdot (l - x) \cdot dx = 0,$$

$$F_C = \frac{1}{14} \cdot q \cdot l.$$

Preostale reakcije mogu se dobiti iz uvjeta ravnoteže i glase:

$$F_{Ax} = F_C = \frac{1}{14} \cdot q \cdot l,$$

$$F_{Az} = 2 \cdot q \cdot l,$$

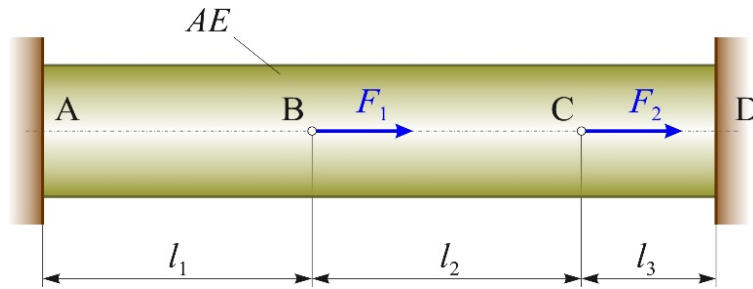
$$M_A = -\frac{27}{14} \cdot q \cdot l.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 3.6. Za štap zadan i opterećen prema slici 3.15. valja odrediti reakcijske sile u A i D primjenom drugoga Castiglianova teorema.

Zadano je: $F_1 = 15 \text{ kN}$, $F_2 = 12 \text{ kN}$, $l = 0,5 \text{ m}$, A , E , $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $l_3 = l$.

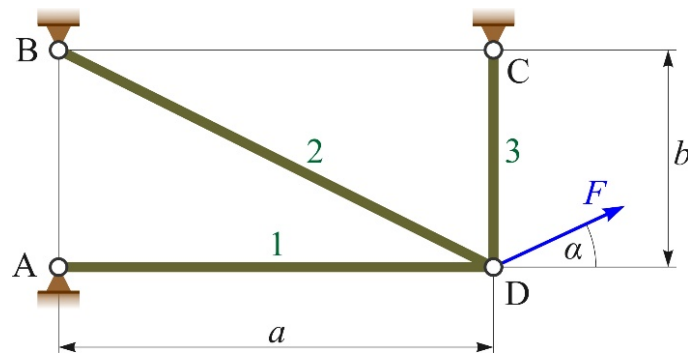


Slika Z.3.6. Zadatak 3.6.

Zadatak 3.7. Za konstrukciju sastavljenu od triju štapova i opterećenu prema slici Z.3.7. potrebno je odrediti uzdužne sile u štapovima primjenjujući drugi Castiglianov teorem.

Štapovi su istog poprečnog presjeka i načinjeni od istog materijala.

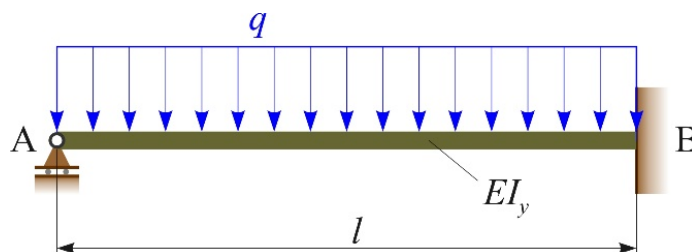
Zadano je: $F = 10 \text{ kN}$, $a = 1,4 \text{ m}$, $b = 0,7 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, A , E .



Slika Z.3.7. Zadatak 3.7.

Zadatak 3.8. Za linijski statički neodređeni nosač zadan i opterećen prema slici Z.3.8. potrebno je izračunati reakcije oslonaca primjenom drugoga Castiglianova teorema.

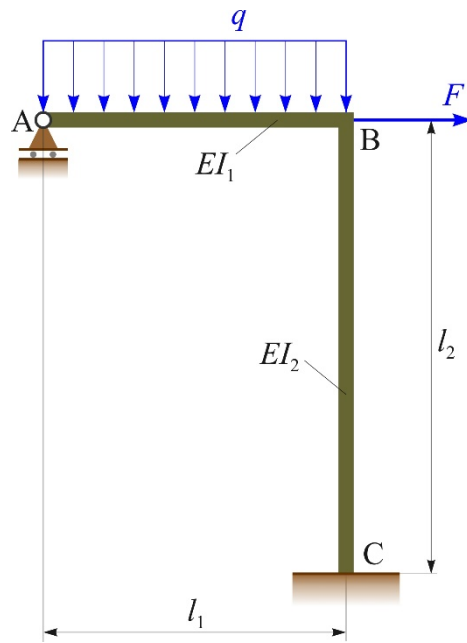
Zadano je: $q = 18 \text{ kN/m}$, $l = 2 \text{ m}$, I_y , E .



Slika Z.3.8. Zadatak 3.8.

Zadatak 3.9. Za statički neodređeni okvorni nosač zadan i opterećen prema slici Z.3.9. potrebno je izračunati reakcije oslonaca primjenom drugoga Castiglianova teorema.

Zadano je: $F = 20 \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN/m}$, $l = 0,5 \text{ m}$, I_y , E , $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 3 \cdot l$, $I_1 = I_y$, $I_2 = 2 \cdot I_y$.



Slika Z.3.9. Zadatak 3.9.

4. MOHROV INTEGRAL

Mohrov integral prikladan je za određivanje poopćenog pomaka (bilo linearnog pomaka bilo kutnog zakreta) opterećene konstrukcije neovisno o tome djeluje li u točki u kojoj se određuje poopćeni pomak odgovarajuća poopćena sila ili ne.

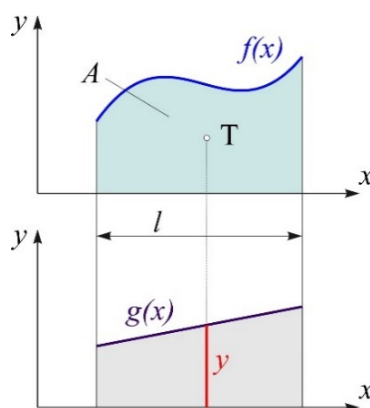
Mohrov integral glasi:

$$\begin{aligned}
 q = & \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i \cdot E_i} \cdot \int_0^{l_i} N_i \cdot n_i \cdot dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i \cdot G_i} \cdot \int_0^{l_i} k_z \cdot Q_{zi} \cdot q_{zi} \cdot dx + \\
 & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i \cdot G_i} \cdot \int_0^{l_i} k_y \cdot Q_{yi} \cdot q_{yi} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot \int_0^{l_i} M_{yi} \cdot m_{yi} \cdot dx + \\
 & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{zi} \cdot E_i} \cdot \int_0^{l_i} M_{zi} \cdot m_{zi} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{pi} \cdot G_i} \cdot \int_0^{l_i} M_{ti} \cdot m_{ti} \cdot dx,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdje su velikim slovima označene unutarnje sile od vanjskog opterećenja, a malim unutarnje sile od jedinične poopćene sile koja odgovara poopćenom pomaku.

4.1. VEREŠČAGINOVO PRAVILO

Ovo pravilo koristi se za jednostavnije izračunavanje određenog integrala produkta dviju funkcija od kojih barem jedna mora biti linearna. Neka su zadane dvije funkcije $f(x)$ i $g(x)$ od kojih je prva nelinearna, a druga linearna (slika 4.1.).



Slika 4.1.

Određeni integral produkta tih dviju funkcija može se izračunati prema Vereščaginovu pravilu:

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = A \cdot y,$$

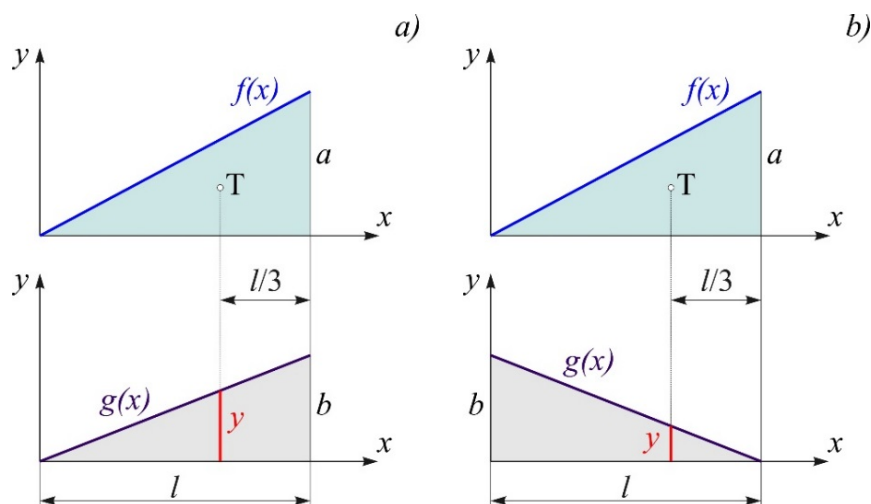
gdje je A površina ispod nelinearne funkcije, a y ordinata linearne funkcije na mjestu gdje nelinearna funkcija ima težište.

Ovo pravilo može se naravno koristiti i kada su obje funkcije linearne pa je tako za slučaj funkcija prema slici 4.2.a integral produkta tih funkcija jednak:

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot l,$$

a za slučaj funkcija prema slici 4.2.b:

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot b = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot l.$$

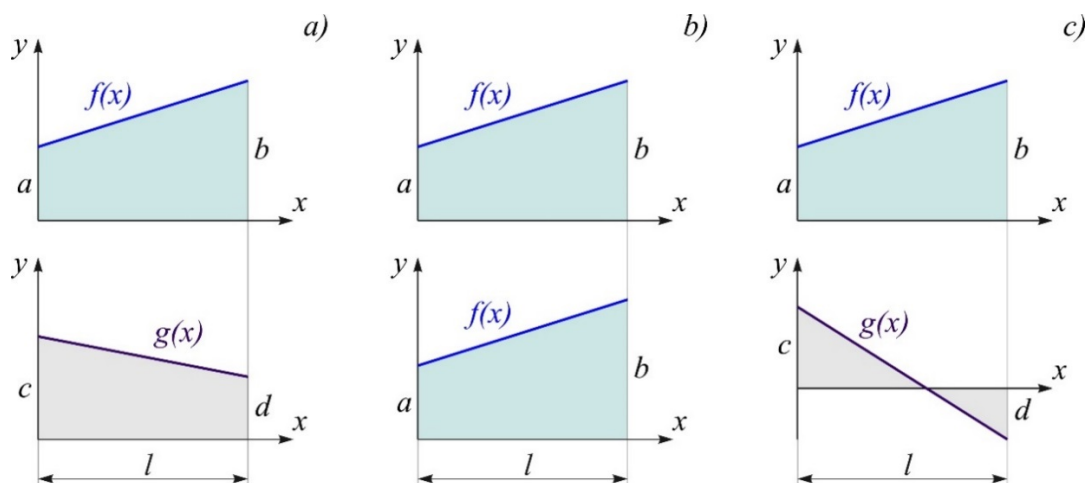


Slika 4.2.

Kada su obje funkcije linearne i oblika prema slici 4.3., integral produkta tih funkcija računa se prema formuli:

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{l}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c),$$

vodeći računa o predznacima vrijednosti za a , b , c i d .

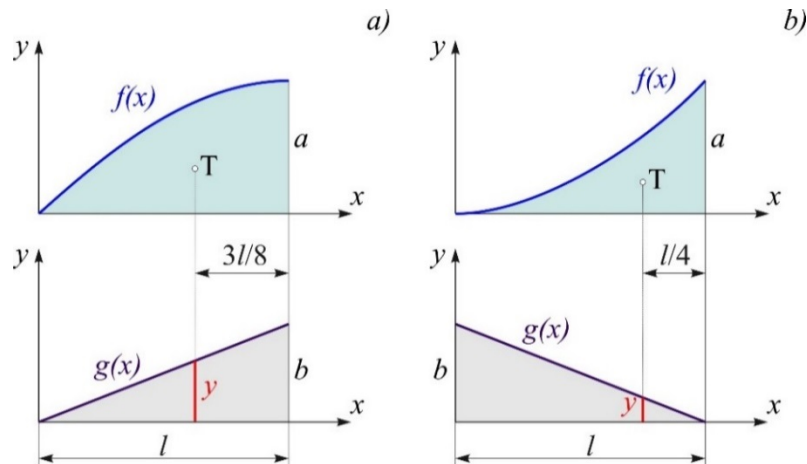


Slika 4.3.

Kada je $g(x) = f(x)$, tj. kada se funkcija množi sama sa sobom (slika 4.3.b), formula prelazi u oblik:

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{l}{3} \cdot (a^2 + b^2 + a \cdot b).$$

U zadacima koji slijede često će oblik funkcija biti kao što je na slici 4.4.



Slika 4.4.

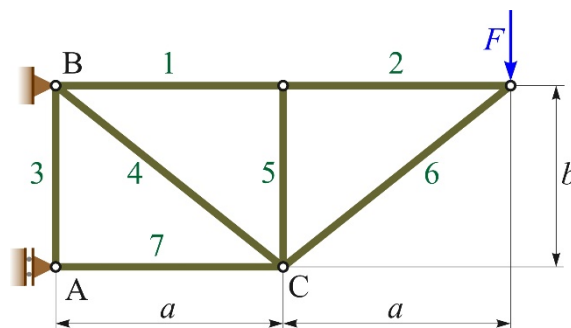
Tako je integral produkta tih funkcija za oblik prema slici 4.4.a i 4.4.b jednak:

$$\int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot l \cdot a \cdot \frac{5}{8} \cdot b, \quad \int_0^l f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot l \cdot a \cdot \frac{1}{4} \cdot b.$$

4.2. AKSIJALNO OPTEREĆENJE

Primjer 4.1.

Za rešetkastu konstrukciju opterećenu prema slici 4.5. primjenom Mohrova integrala valja odrediti vertikalni pomak čvora C ako je zadano: F , a , b , A , E , $a = l$, $b = 0,8 \cdot l$.



Slika 4.5. Primjer 4.1.

Rješenje:

U poprečnom presjeku štapa od unutarnjih sila javlja se samo uzdužna sila pa izraz (4.1) glasi:

$$q = \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i \cdot E_i} \cdot \int_0^{l_i} N_i \cdot n_i \cdot dx. \quad (4.2)$$

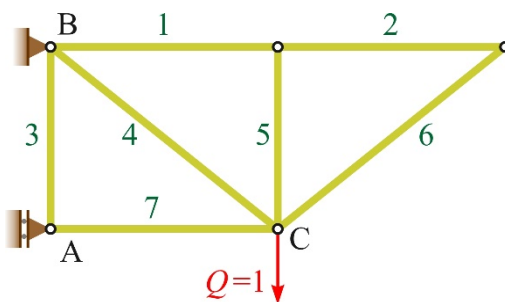
Kako su duž svakog štapa uzdužne sile N_i i n_i konstantne, može se izraz (4.2) pisati u obliku:

$$q = \sum_{i=1}^7 \frac{N_i \cdot n_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i}. \quad (4.3)$$

U zadanom primjeru svi su štapovi napravljeni od istog materijala i imaju jednak poprečni presjek pa je vertikalni pomak čvora C jednak:

$$q = v_C = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^7 N_i \cdot n_i \cdot l_i,$$

gdje su N_i uzdužne sile u štapovima rešetkastog nosača od vanjskog opterećenja, a n_i uzdužne sile od jedinične poopćene sile Q koja odgovara vertikalnom pomaku čvora C (slika 4.6.).



Slika 4.6. Primjer 4.1.

Uzdužne sile od jednog i drugog opterećenja dane su u tablici 4.1.

Tablica 4.1. Uzdužne sile u štapovima rešetkastog opterećenja od obaju opterećenja

Štap	1	2	3	4	5	6	7
N_i	$1,25 \cdot F$	$1,25 \cdot F$	0	$1,6 \cdot F$	0	$-1,6 \cdot F$	$-2,5 \cdot F$
n_i	0	0	0	1,6	0	0	-1,25
l_i	l	l	$0,8 \cdot l$	$1,281 \cdot l$	$0,8 \cdot l$	$1,281 \cdot l$	l

Vertikalni pomak čvora C sada je:

$$v_C = \frac{1}{A \cdot E} \cdot [1,6 \cdot F \cdot 1,6 \cdot 1,281 \cdot l + (-2,5 \cdot F) \cdot (-1,25) \cdot l] = 6,407 \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E}.$$

Pozitivna vrijednost znači da je smjer pomaka kao i smjer poopćene sile u čvoru C.

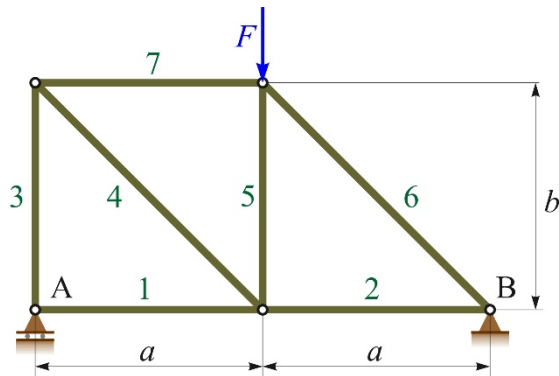
Za vrijednosti $F = 15 \text{ kN}$, $l = 2 \text{ m}$, $A = 225 \text{ mm}^2$ i $E = 200 \text{ GPa}$ ovaj pomak iznosi:

$$v_C = 6,407 \cdot \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{225 \cdot 200 \cdot 10^3} = 4,271 \text{ mm}.$$

Primjer 4.2.

Rešetkasti nosač zadan je i opterećen prema slici 4.7. Valja, primjenom Mohrova integrala, odrediti horizontalni pomak čvora A ako je zadano: F , a , b , A , E , $a = b = l$.

Za vrijednosti $F = 12 \text{ kN}$, $l = 3 \text{ m}$, $A = 64 \text{ mm}^2$ i $E = 210 \text{ GPa}$ treba izračunati traženi pomak u milimetrima.



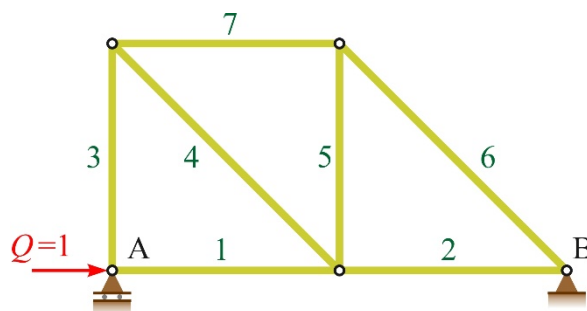
Slika 4.7. Primjer 4.2.

Rješenje:

Horizontalni pomak čvora A dobije se prema (4.3):

$$q = h_A = \frac{1}{A \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^7 N_i \cdot n_i \cdot l_i,$$

gdje su N_i uzdužne sile u štapovima rešetkastog nosača od vanjskog opterećenja, a n_i uzdužne sile od jedinične poopćene sile Q koja odgovara horizontalnom pomaku čvora A (slika 4.8.).



Slika 4.8. Primjer 4.2.

Uzdužne sile od jednog i drugog opterećenja prikazane su u tablici 4.2.

Tablica 4.2. Uzdužne sile u štapovima rešetkastog opterećenja od obaju opterećenja

Štap	1	2	3	4	5	6	7
N_i	0	$0,5 \cdot F$	$-0,5 \cdot F$	$-0,707 \cdot F$	$-0,5 \cdot F$	$-0,707 \cdot F$	$-0,5 \cdot F$
n_i	-1	-1	0	0	0	0	0
l_i	l	l	l	$1,414 \cdot l$	l	$1,414 \cdot l$	l

Horizontalni pomak čvora A sada je:

$$h_A = \frac{1}{A \cdot E} \cdot [0,5 \cdot F \cdot (-1) \cdot l] = -0,5 \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E}.$$

Negativna vrijednost znači da je smjer pomaka suprotan smjeru poopćene sile u čvoru C.

Za vrijednosti $F = 12 \text{ kN}$, $l = 3 \text{ m}$, $A = 64 \text{ mm}^2$ i $E = 210 \text{ GPa}$ ovaj pomak iznosi:

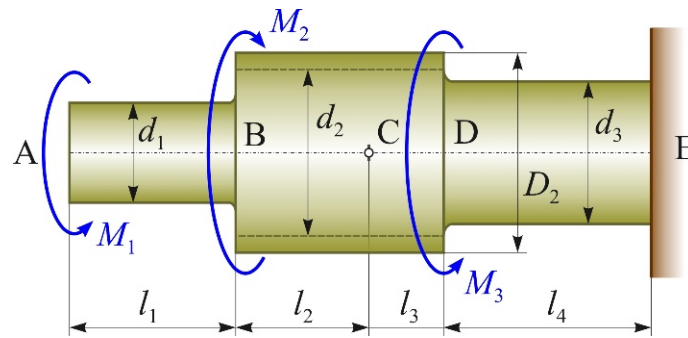
$$h_A = -0,5 \cdot \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{64 \cdot 210 \cdot 10^3} = -1,339 \text{ mm}.$$

4.3. UVIJANJE

Primjer 4.3.

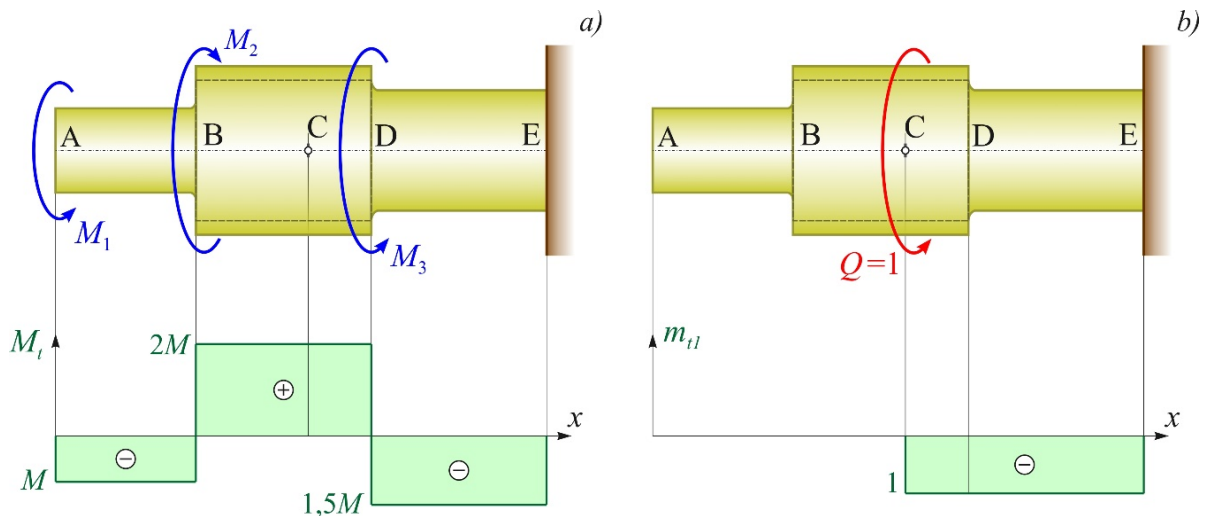
Štap okrugloga poprečnog presjeka opterećen je trima koncentriranim momentima (slika 4.9.). Valja odrediti kutni zakret presjeka C primjenom Mohrova integrala.

Zadano je: M , l , d , G , $l_1 = l$, $l_2 = 0,75 \cdot l$, $l_3 = 0,5 \cdot l$, $l_4 = 2 \cdot l$, $d_1 = d$, $D_2 = 2 \cdot d$, $d_2 = 1,6 \cdot d$, $d_3 = 1,4 \cdot d$, $M_1 = M$, $M_2 = 3 \cdot M$, $M_3 = 3,5 \cdot M$.



Slika 4.9. Primjer 4.3.

Rješenje:



Slika 4.10. Primjer 4.3.

Kut zakreta (kut uvijanja) presjeka C dobije se prema (4.1) uz postojanje samo momenta uvijanja u poprečnim presjecima svakog segmenta:

$$q = \alpha_C = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{G_i \cdot I_{pi}} \cdot \int_0^{l_i} M_{ti} \cdot m_{ti} \cdot dx = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ti} \cdot m_{ti} \cdot l_i}{G_i \cdot I_{pi}}, \quad (4.4)$$

gdje su M_{ti} momenti uvijanja u presjecima štapa od vanjskog opterećenja (slika 4.10.a), a m_{ti} momenti uvijanja od jedinične poopćene sile Q koja odgovara kutu zakreta presjeka C (slika 4.10.b).

Kut zakreta (kut uvijanja) presjeka C sada je prema (4.4):

$$\begin{aligned} \alpha_C &= \frac{M_{t3} \cdot m_{t3} \cdot l_3}{G \cdot I_{p3}} + \frac{M_{t4} \cdot m_{t4} \cdot l_4}{G \cdot I_{p4}} = \frac{1}{G \cdot I_{p3}} \cdot [2 \cdot M \cdot (-1) \cdot 0,5 \cdot l] + \\ &+ \frac{1}{G \cdot I_{p4}} \cdot [-1,5 \cdot M \cdot (-1) \cdot 2 \cdot l], \\ \alpha_C &= -\frac{M \cdot l}{G \cdot I_{p3}} + \frac{3 \cdot M \cdot l}{G \cdot I_{p4}}, \end{aligned}$$

gdje su polarni momenti tromosti dobiveni prema:

$$\begin{aligned} I_{p3} &= \frac{\pi \cdot D_2^4}{32} - \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^4}{32} - \frac{\pi \cdot (1,6 \cdot d)^4}{32} = 0,9274 \cdot d^4, \\ I_{p4} &= \frac{\pi \cdot (1,4 \cdot d)^4}{32} = 0,3771 \cdot d^4. \end{aligned}$$

Dalje je:

$$\alpha_C = -\frac{M \cdot l}{G \cdot 0,9274 \cdot d^4} + \frac{3 \cdot M \cdot l}{G \cdot 0,3771 \cdot d^4} = 6,8772 \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot d^4}.$$

Za vrijednosti $M = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $d = 50 \text{ mm}$ i $G = 80 \text{ GPa}$ traženi kutni zakret jest:

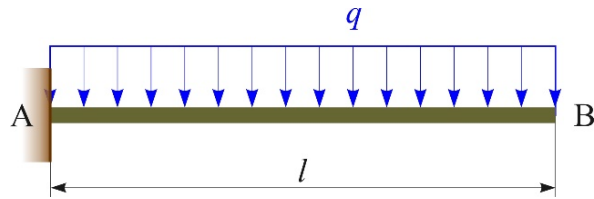
$$\alpha_C = 6,8772 \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot d^4} = 6,8772 \cdot \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot 50^4} = 0,033 \text{ rad}.$$

4.4. SAVIJANJE

Primjer 4.4.

Konzolni nosač zadan je i opterećen prema slici 4.11. Valja odrediti progib i kut zakreta elastične linije (nagib) u B primjenom Mohrova integrala.

Zadano je: q , l , E , I_y .



Slika 4.11. *Primjer 4.4.*

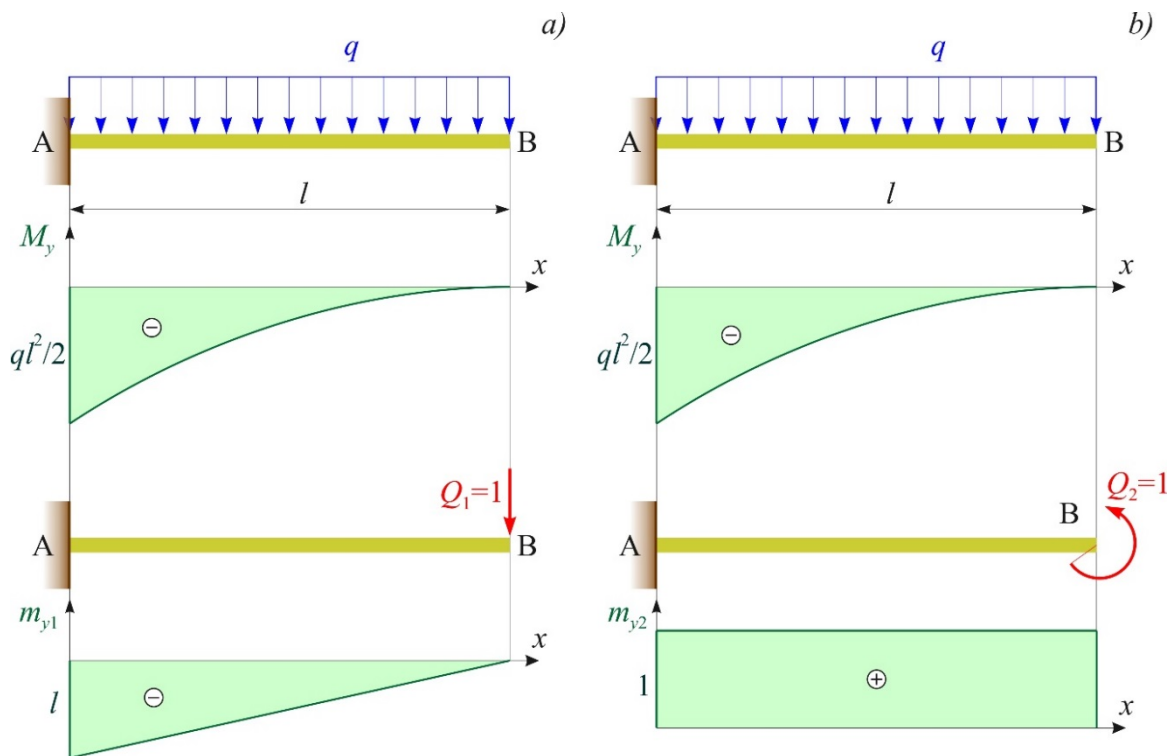
Rješenje:

Traženi pomaci određuju se prema (4.1). U poprečnom presjeku nosača od unutarnjih sila javljaju se moment savijanja i poprečna sila pa Mohrov integral glasi:

$$q = \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i \cdot G_i} \cdot \int_0^{l_i} k_z \cdot Q_{zi} \cdot q_{zi} \cdot dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot \int_0^{l_i} M_{yi} \cdot m_{yi} \cdot dx . \quad (4.5)$$

Utjecaj poprečne sile u odnosu na moment savijanja može se zanemariti pa se izraz (4.5) može pisati u obliku:

$$q = \sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot \int_0^{l_i} M_{yi} \cdot m_{yi} \cdot dx . \quad (4.6)$$



Slika 4.12. *Primjer 4.3.*

Progib u B i kut zakreta elastične linije u istoj točki mogu se dobiti prema izrazima:

$$q_1 = w_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_0^l M_y \cdot m_{y1} \cdot dx ; \quad q_2 = \beta_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_0^l M_y \cdot m_{y2} \cdot dx ,$$

gdje su M_y moment savijanja od vanjskog opterećenja, m_{y1} moment savijanja od jedinične

poopćene sile Q_1 koja odgovara progibu točke B (slika 4.12.a), a m_{y2} moment savijanja od jedinične poopćene sile Q_2 koja odgovara nagibu točke B (slika 4.12.b).

Progib i nagib u točki B uz korištenje Vereščaginova pravila jesu:

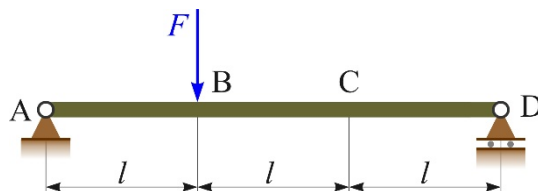
$$w_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_0^l M_y \cdot m_{y1} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot l \cdot \left(-\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-l) \right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}$$

$$\beta_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \int_0^l M_y \cdot m_{y2} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot l \cdot \left(-\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot 1 \right] = -\frac{1}{6} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y}$$

Primjer 4.5.

Jednostavni nosač zadan je i opterećen prema slici 4.13. Valja odrediti progib u C i kut zakreta elastične linije (nagib) u B primjenom Mohrova integrala.

Zadano je: F , l , E , I_y .



Slika 4.13. Primjer 4.5.

Rješenje:

Traženi pomaci određuju se sukladno izrazu (4.6):

$$q_1 = w_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} M_{yi} \cdot m_{y1i} \cdot dx;$$

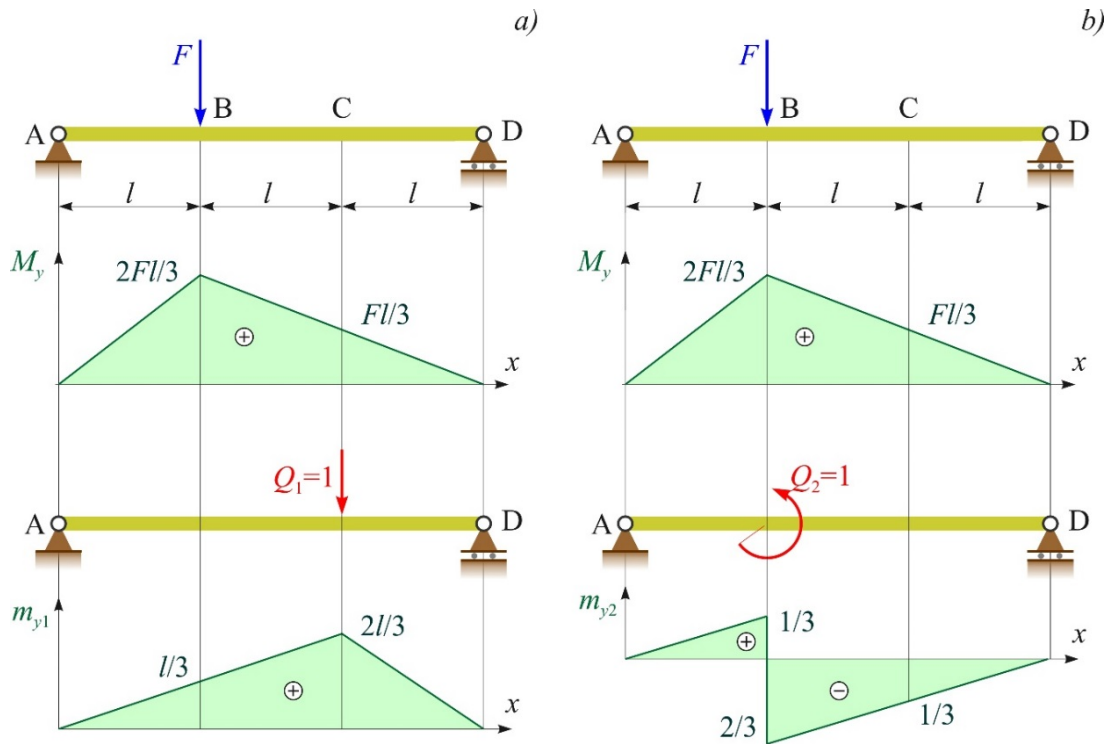
$$q_2 = \beta_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} M_{yi} \cdot m_{y2i} \cdot dx,$$

gdje su M_y moment savijanja od vanjskog opterećenja, m_{y1} moment savijanja od jedinične poopćene sile Q_1 koja odgovara progibu točke C (slika 4.14.a), a m_{y2} moment savijanja od jedinične poopćene sile Q_2 koja odgovara nagibu točke B (slika 4.14.b).

Progib u C i nagib u B iznose uz primjenu Vereščaginova pravila:

$$w_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2 \cdot F \cdot l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} + \frac{l}{6} \cdot \left(2 \cdot \frac{2 \cdot F \cdot l}{3} \cdot \frac{l}{3} + 2 \cdot \frac{F \cdot l}{3} \cdot \frac{2 \cdot l}{3} + \frac{2 \cdot F \cdot l}{3} \cdot \frac{2 \cdot l}{3} + \frac{F \cdot l}{3} \cdot \frac{l}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{F \cdot l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot l}{3} \right] = \frac{7}{18} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y}$$

$$\beta_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2 \cdot F \cdot l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{2 \cdot F \cdot l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = -\frac{2}{9} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y}$$

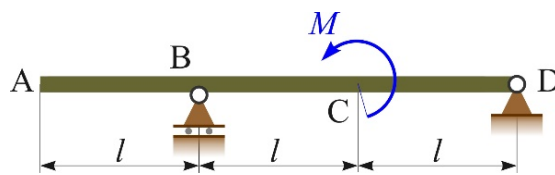


Slika 4.14. *Primjer 4.5.*

Primjer 4.6.

Nosač s prepustom zadan je i opterećen prema slici 4.15. Potrebno je odrediti progib i nagib točke A primjenom Mohrova integrala.

Zadano je: M , l , E , I_y .



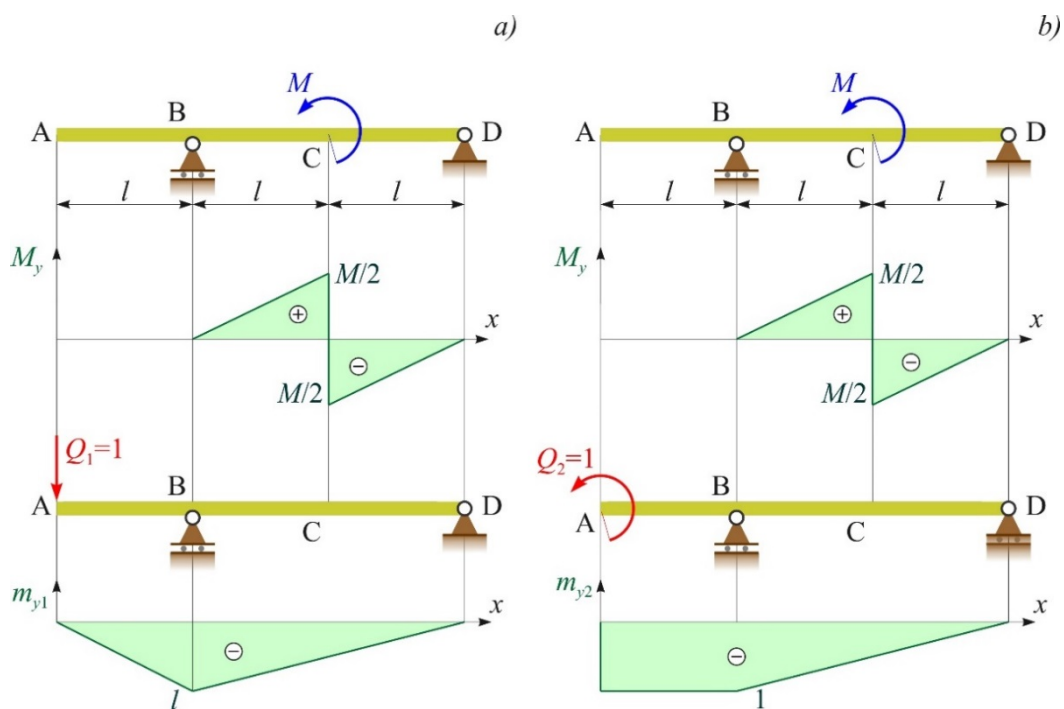
Slika 4.15. *Primjer 4.6.*

Rješenje:

Traženi pomaci određuju se prema izrazima:

$$q_1 = w_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} M_{y_i} \cdot m_{y1i} \cdot dx; \quad q_2 = \beta_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} M_{y_i} \cdot m_{y2i} \cdot dx,$$

gdje su M_y moment savijanja od vanjskog opterećenja, m_{y1} moment savijanja od jedinične poopćene sile Q_1 koja odgovara progibu točke A (slika 4.16.a), a m_{y2} moment savijanja od jedinične poopćene sile Q_2 koja odgovara nagibu točke A (slika 4.16.b).



Slika 4.16. Primjer 4.6.

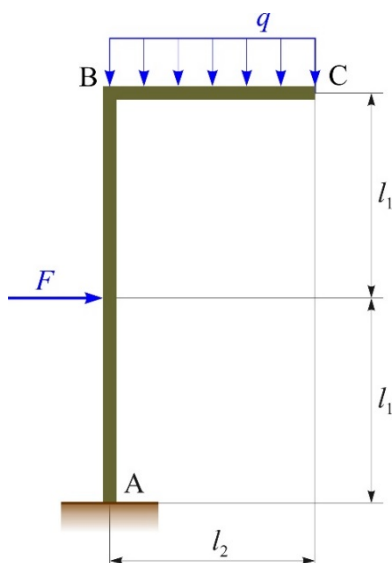
Primjenom Vereščaginova pravila progib i nagib u A glase:

$$w_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-l) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(-\frac{M}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{l}{2} \right) \right] = -\frac{1}{12} \cdot \frac{M \cdot l^2}{E \cdot I_y}$$

$$\beta_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(-\frac{M}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{12} \cdot \frac{M \cdot l}{E \cdot I_y}$$

Primjer 4.7.

Za okvirni nosač zadan i opterećen prema slici 4.17. valja odrediti vertikalni pomak točke C primjenom Mohrova integrala ako je zadano: q , l , E , I_y te $F = 0,5 \cdot q \cdot l$, $l_1 = l$, $l_2 = l$.



Slika 4.17. Primjer 4.7.

Rješenje:

Vertikalni pomak točke C dobije se, uz zanemarivanje utjecaja uzdužne i poprečne sile u odnosu na moment savijanja, prema izrazu (4.1) koji prelazi u izraz:

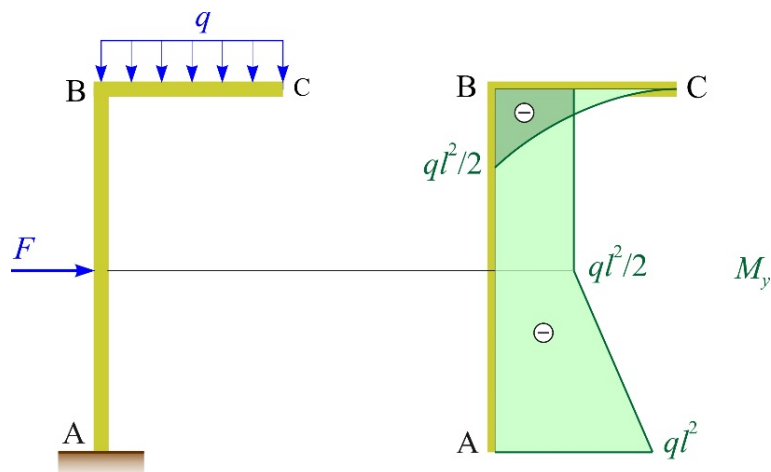
$$q = v_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} M_{yi} \cdot m_{yi} \cdot dx,$$

gdje su M_y moment savijanja od vanjskog opterećenja (slika 4.18.), a m_{y1} moment savijanja od jedinične poprečne sile Q koja odgovara vertikalnom pomaku točke C (slika 4.19.).

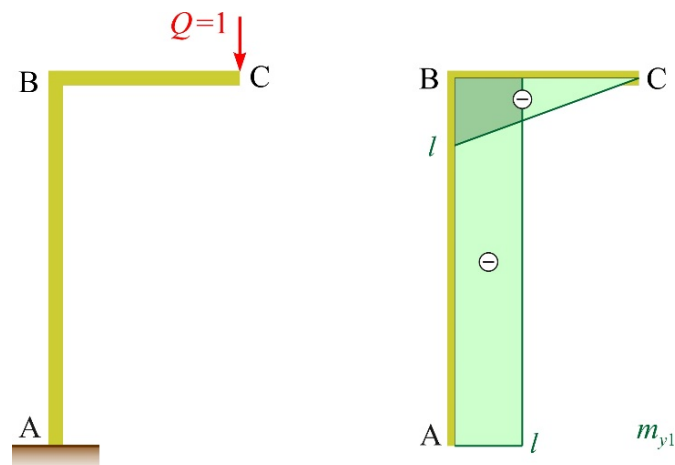
Vertikalni pomak točke C uz primjenu Vereščaginova pravila iznosi:

$$v_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left\{ \frac{l}{6} \cdot \left[2 \cdot (-q \cdot l^2) \cdot (-l) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 \right) \cdot (-l) + (-q \cdot l^2) \cdot (-l) + \left(-\frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 \right) \cdot (-l) \right] + \left(-\frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 \right) \cdot l \cdot (-l) + \frac{1}{3} \cdot l \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-l) \right\}$$

$$v_C = \frac{11}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}.$$



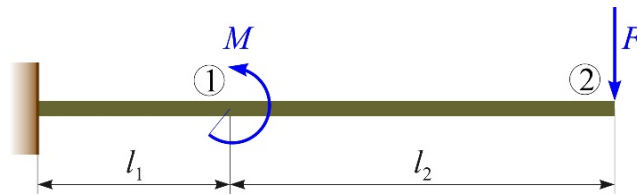
Slika 4.18. Primjer 4.7.



Slika 4.19. Primjer 4.7.

Primjer 4.8.

Za konzolni nosač prema slici 4.20. valja odrediti sve koeficijente podatnosti koristeći se Mohrovim integralom. Zadano je: l , I_y , E , $l_1 = l$, $l_2 = 2 \cdot l$.

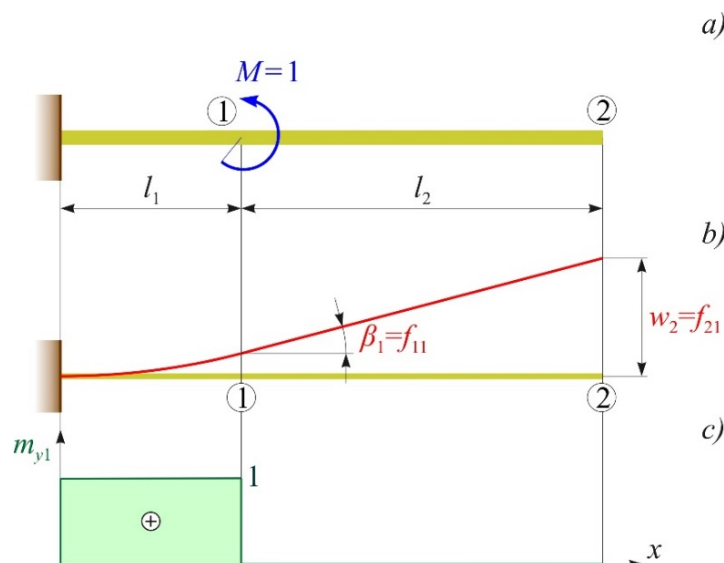


Slika 4.20. Primjer 4.8.

Rješenje:

Kao što je objašnjeno u poglavlju 2, koeficijent podatnosti f_{ij} predstavlja poopćeni pomak na mjestu i od jedinične poopćene sile na mjestu j .

U ovom primjeru koeficijent podatnosti f_{11} predstavlja kutni zakret elastične linije β_1 na mjestu 1 od jediničnog momenta $M = 1$ na mjestu 1 , a koeficijent podatnosti f_{21} predstavlja progib w_2 na mjestu 2 od jediničnog momenta $M = 1$ na mjestu 1 (slika 4.21.a i b).



Slika 4.21. Primjer 4.8.

Koeficijent podatnosti f_{22} predstavlja progib w_2 na mjestu 2 od jedinične sile $F = 1$ na mjestu 2 , a koeficijent podatnosti f_{12} predstavlja kutni zakret elastične linije β_1 na mjestu 1 od jedinične sile $F = 1$ na mjestu 2 (slika 4.22.a i b).

Koeficijenti podatnosti mogu se sada odrediti prema izrazu (4.1), uz zanemarivanje utjecaja poprečne sile u odnosu na moment savijanja te uz primjenu Vereščaginova pravila, na sljedeći način:

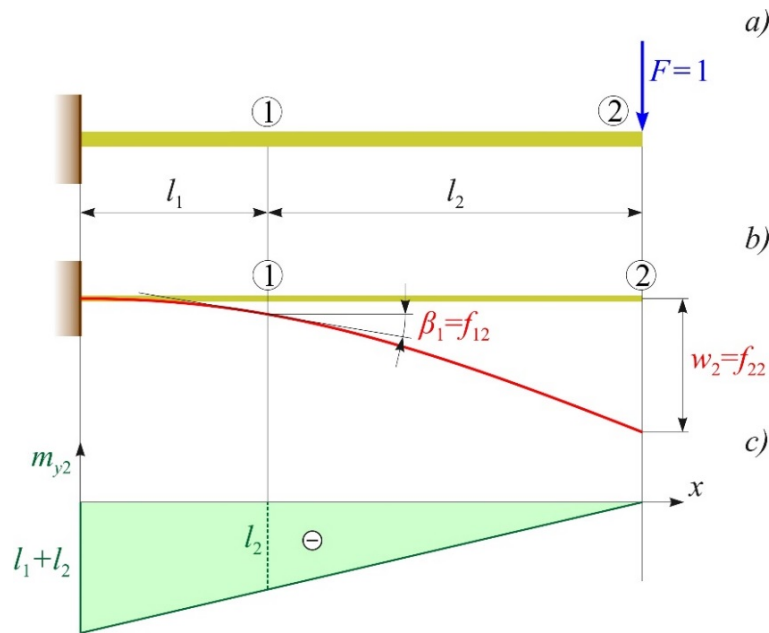
$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \sum \int m_{y1} \cdot m_{y1} \cdot dx; \quad f_{12} = f_{21} = \frac{1}{E \cdot I_y} \sum \int m_{y1} \cdot m_{y2} \cdot dx;$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \sum \int m_{y2} \cdot m_{y2} \cdot dx;$$

gdje su:

m_{y1} – dijagram momenta savijanja od jediničnog momenta $M = 1$ na mjestu **1** (slika 4.21.c);

m_{y2} – dijagram momenta savijanja od jedinične sile $F = 1$ na mjestu **2** (slika 4.22.c).



Slika 4.22. Primjer 4.8.

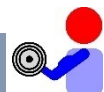
$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} (l_1 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{l_1}{E \cdot I_y} = \frac{l}{E \cdot I_y};$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(l_1 \cdot 1 \cdot \frac{l_1 + l_2 + l_2}{2} \right) = -\frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(l \cdot 1 \cdot \frac{l + 2 \cdot l + 2 \cdot l}{2} \right);$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{5 \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_y};$$

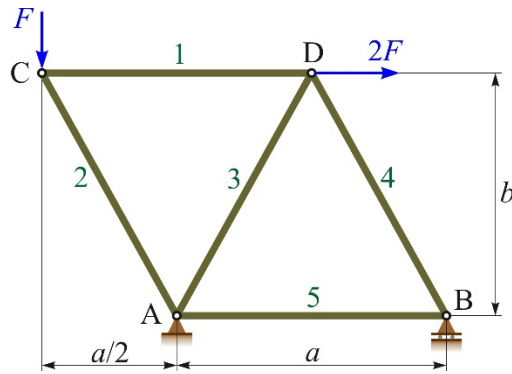
$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \left[\frac{1}{2} \cdot (l_1 + l_2) \cdot (l_1 + l_2) \cdot \frac{2}{3} \cdot (l_1 + l_2) \right] = \frac{(l_1 + l_2)^3}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{9 \cdot l^3}{E \cdot I_y}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



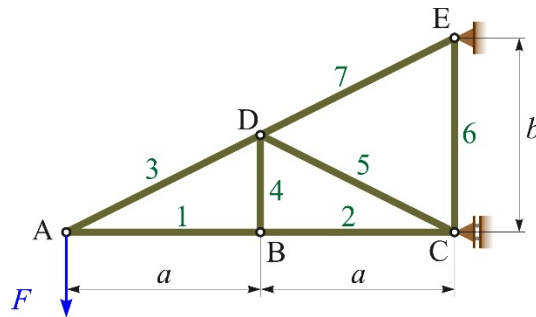
Zadatak 4.1. Za rešetkasti nosač koji je zadan i opterećen prema slici Z.4.1. potrebno je uz pomoć Mohrova integrala odrediti vertikalni pomak čvora C i horizontalni pomak čvora D.

Zadano je: $F = 15 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 2,4 \text{ m}$, $A = 625 \text{ mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$.



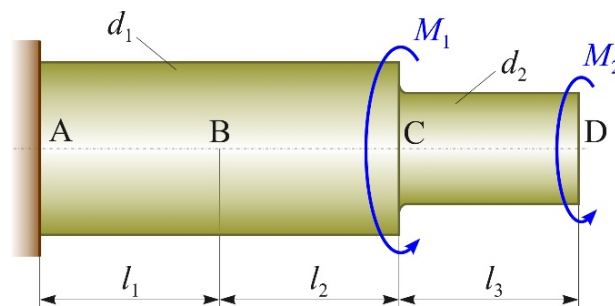
Slika Z.4.1. Zadatak 4.1.

Zadatak 4.2. Rešetkasti nosač zadan je i opterećen prema slici Z.4.2. Primjenom Mohrova integrala valja odrediti vertikalni pomak čvora B ako je zadano: $F = 20 \text{ kN}$, $a = 2,5 \text{ m}$, $b = 1,8 \text{ m}$, $A = 400 \text{ mm}^2$, $E = 70 \text{ GPa}$.



Slika Z.4.2. Zadatak 4.2.

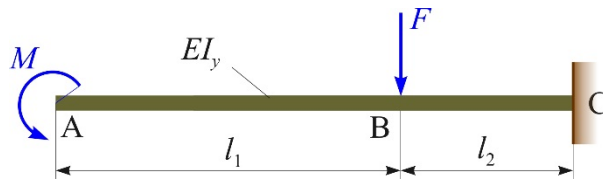
Zadatak 4.3. Za štap okrugloga poprečnog presjeka koji je opterećen koncentriranim momentima prema slici Z.4.3. valja odrediti kutne zakrete presjeka B, C i D primjenom Mohrova integrala. Zadano je: $M_1 = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_2 = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $l_1 = 0,8 \text{ m}$, $l_2 = 1,2 \text{ m}$, $l_3 = 1 \text{ m}$, $d_1 = 120 \text{ mm}$, $d_2 = 90 \text{ mm}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Slika Z.4.3. Zadatak 4.3.

Zadatak 4.4. Konzolni nosač zadan je i opterećen prema slici Z.4.4. Primjenom Mohrova integrala valja odrediti opće izraze za progib točke A i nagib u B ako je zadano: F , l , I_y , E , $l_1 = 2\cdot l$, $l_2 = l$, $M = 3\cdot F\cdot l$.

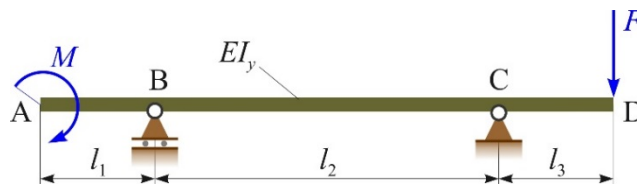
Za vrijednosti ulaznih podataka: $F = 15 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $I_y = 8,6\cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $E = 210 \text{ GPa}$, treba izračunati traženi progib u milimetrima i kut zakreta u radijanima.



Slika Z.4.4. *Zadatak 4.4.*

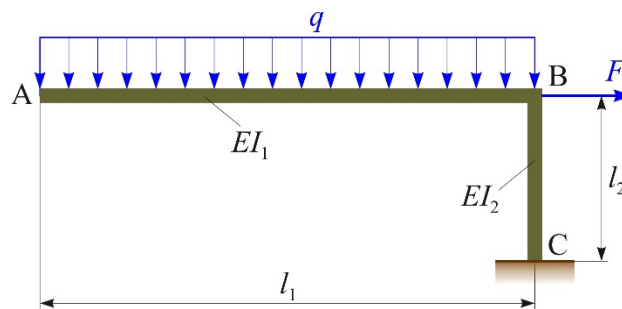
Zadatak 4.5. Za linijski nosač, zadan i opterećen prema slici Z.4.5., potrebno je izračunati progib točke A i kut zakreta elastične linije (nagib) u D primjenom Mohrova integrala.

Zadano je: $F, l, I_y, E, l_1 = l, l_2 = 3 \cdot l, l_3 = 0,8 \cdot l, M = 2 \cdot F \cdot l$.



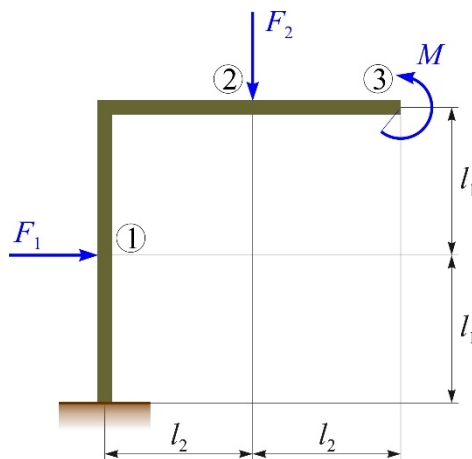
Slika Z.4.5. *Zadatak 4.5.*

Zadatak 4.6. Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici Z.4.6. Valja odrediti vertikalni pomak točke A i horizontalni pomak točke B uz pomoć Mohrova integrala. Zadano je: q, l, I_y, E te $F = 2 \cdot q \cdot l, l_1 = 3 \cdot l, l_2 = l, I_1 = 2 \cdot I_y, I_2 = I_y$.



Slika Z.4.6. *Zadatak 4.6.*

Zadatak 4.7. Za okvirni nosač prema slici Z.4.7. potrebno je primjenom Mohrova integrala odrediti sve koeficijente podatnosti ako je zadano: l, I_y, E .



Slika Z.4.7. *Zadatak 4.7.*

5. METODA SILA

Metoda sila koristi se za rješavanje statički neodređenih zadataka. U prvom koraku utvrđuje se koliko je puta zadatak statički neodređen. Zatim se iz zadane konstrukcije, uklanjanjem suvišnih veza, formira ekvivalentna statički određena konstrukcija (*osnovna konstrukcija*). Potom se određuju unutarnje sile za osnovnu konstrukciju zbog djelovanja vanjskog opterećenja kao i unutarnje sile od jedinične poopćene sile/jediničnih poopćenih sila. Postavlja se onoliko jednadžba koliko je puta zadatak statički neodređen. Te se jednadžbe nazivaju *kanonske jednadžbe metode sila*. Njihovim rješavanjem određuju se nepoznate sile ili momenti. Konačni dijagrami unutarnjih sila dobiju se zbrajanjem dijagrama za osnovnu konstrukciju zbog djelovanja vanjskog opterećenja i dijagrama unutarnjih sila za osnovnu konstrukciju zbog djelovanja jediničnih poopćenih sila pomnoženih s vrijednostima dobivenima za nepoznate poopćene sile.

U primjerima koji slijede pokazat će se primjena metode sila za zadatke koji su jedan i dva puta statički neodređeni, za slučajeve aksijalnog opterećenja, uvijanja te savijanja linijskih i okvirnih nosača.

Za jedanput statički neodređenu konstrukciju osnovna (kanonska) jednadžba metode sila glasi:

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0, \quad (5.1)$$

gdje je f_{11} koeficijent podatnosti, a q_{1F} slobodni član, dok za dva puta statički neodređenu konstrukciju kanonske jednadžbe metode sila glase:

$$\begin{aligned} f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} &= 0 \\ f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

U izrazu (5.2) koeficijenti f_{ij} su koeficijenti podatnosti, a q_i slobodni članovi. Za određivanje navedenih koeficijenata koristit će se Mohrov integral i Vereščaginovo pravilo o određenom integralu produkta dviju funkcija od kojih barem jedna mora biti linearna.

Jednadžba (5.2) može se zapisati u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} q_{1F} \\ q_{2F} \end{Bmatrix}. \quad (5.3)$$

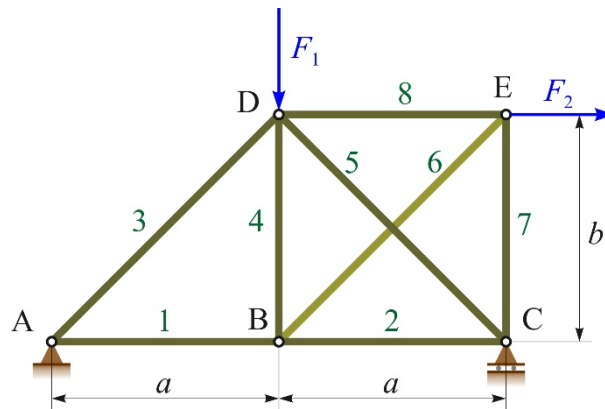
Prvi član na lijevoj strani je matrica podatnosti, drugi član je vektor nepoznanica, a član na desnoj strani jednadžbe je vektor slobodnih članova.

5.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE

Primjer 5.1.

Za statički neodređenu rešetkastu konstrukciju zadanu i opterećenu prema slici 5.1. valja odrediti sile u štapovima koristeći se metodom sila.

Zadano je: $F, l, A, E, F_1 = 2 \cdot F, F_2 = F, a = l, b = l, F = 10 \text{ kN}$.



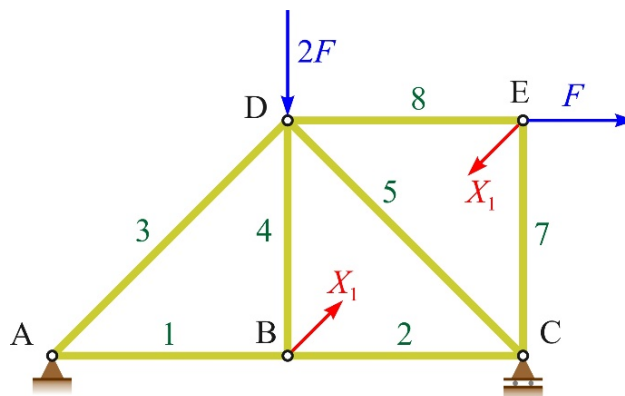
Slika 5.1. *Primjer 5.1.*

Rješenje:

Statička neodređenost određuje se na sljedeći način:

broj štapova je $s = 8$, a broj jednačaba prema uvjetima ravnoteže je $2 \cdot n - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$, gdje je s označen broj čvorova. Budući da je broj nepoznatih sila u štapovima za jedan veći od broja uvjeta ravnoteže, zadatak je jedanput statički neodređen.

Osnovna ekvivalentna statički određena rešetka dobivena je iz zadane uklanjanjem jedne suviše veze. Ovdje je maknut štap 6, a umjesto njega dodana je sila X_1 u čvorovima B i E kako je to pokazano na slici 5.2.



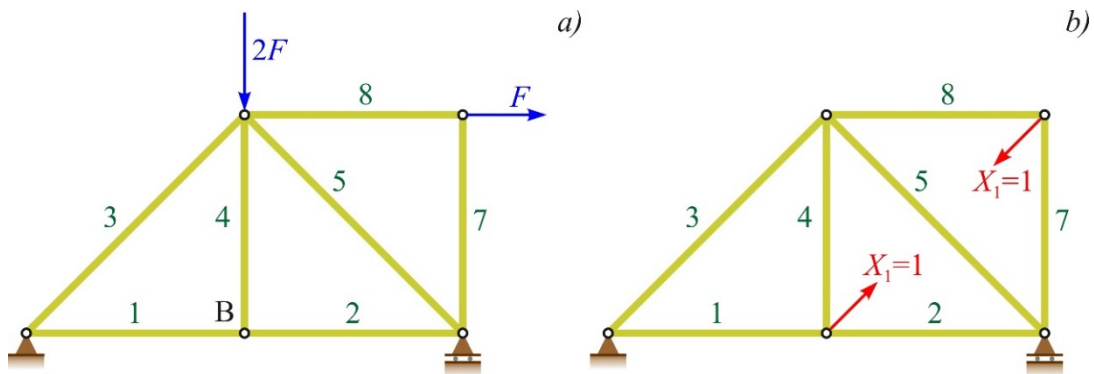
Slika 5.2. *Primjer 5.1.*

Osnovna jednačba metode sila sada je prema (5.1):

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0.$$

Za određivanje koeficijenta podatnosti f_{11} i slobodnog člana q_{1F} potrebno je izračunati uzdužne sile $N_{i,F}$ u štapovima osnovne statički određene rešetke zbog djelovanja vanjskog opterećenja (slika 5.3.a) i sile n_i u štapovima osnovne konstrukcije zbog djelovanja jedinične sile $X_1 = 1$ (slika 5.3.b) kojom je zamijenjen uklonjeni štap 6.

Vrijednosti ovih sila dane su u tablici 5.1.



Slika 5.3. Primjer 5.1.

Tablica 5.1. Uzdužne sile u štapovima osnovne rešetke od vanjskog opterećenja i od jedinične sile $X_1 = 1$ u kN i duljine štapova u m

Štap	1	2	3	4	5	6	7	8
$N_{i,F}$	15,0	15,0	-7,07	0	-21,2	0	0	10,0
n_i	0	-0,707	0	-0,707	1	1	-0,707	-0,707
l_i	1	1	1,414	1	1,414	1,414	1	1

Koeficijenti f_{11} i q_{1F} mogu se dobiti prema izrazima (Mohrov integral):

$$f_{11} = \sum_{i=1}^7 \frac{n_i \cdot n_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i} = \sum_{i=1}^7 \frac{n_i^2 \cdot l_i}{A_i \cdot E_i}, \quad q_{1F} = \sum_{i=1}^7 \frac{N_{i,F} \cdot n_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i}.$$

Dalje je:

$$f_{11} = \frac{4,828}{A \cdot E}; \quad q_{1F} = \frac{-47,678}{AE}.$$

Sada je:

$$X_1 = -\frac{q_{1F}}{\alpha_{11}} = -\frac{-47,678}{4,828} = 9,87 \text{ kN},$$

što predstavlja uzdužnu silu u uklonjenom štapu 6.

Uzdužne sile u ostalim štapovima dobiju se prema jednačbi:

$$N_i = n_i \cdot X_1 + N_{i,F},$$

a vrijednosti su dane u tablici 5.2.

Tablica 5.2. Uzdužne sile u štapovima statički neodređenoga rešetkastog nosača u kN

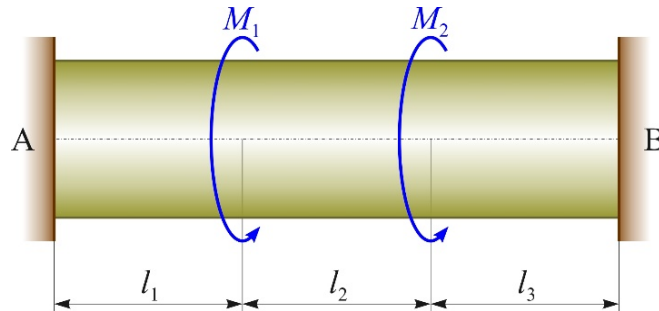
Štap	1	2	3	4	5	6	7	8
N_i	15,0	8,02	-7,07	-6,98	-11,3	9,87	-6,98	3,02

5.2. UVIJANJE

Primjer 5.2.

Za štap okruglog presjeka zadan i opterećen prema slici 5.4. valja odrediti dijagram momenta uvijanja koristeći se metodom sila.

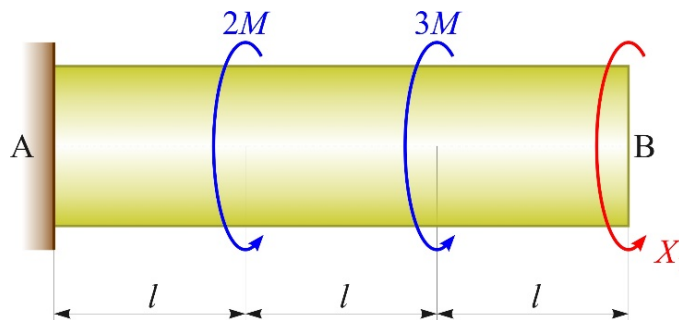
Zadano je: M , l , $M_1 = 2 \cdot M$, $M_2 = 3 \cdot M$, $l_1 = l$, $l_2 = l$, $l_3 = l$.



Slika 5.4. Primjer 5.2.

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen, a ekvivalentan statički određen štap, dobiven iz zadanoga uklanjanjem jedne suvišne veze koja je zamijenjena nepoznatim momentom X_1 , prikazan je na slici 5.5.



Slika 5.5. Primjer 5.2.

Jednadžba metode sila prema (5.1) glasi:

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0.$$

Za određivanje nepoznatih koeficijenata f_{11} i q_{1F} potrebno je najprije izračunati momente uvijanja $M_{t,F}$ u presjecima statički određenog štapa od vanjskog opterećenja (slika 5.6.a) i momente uvijanja m_{t1} u presjecima štapa od jediničnog momenta $X_1 = 1$ (slika 5.6.b).

Koeficijenti f_{11} i q_{1F} dobiju se tada primjenom Mohrova integrala:

$$f_{11} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{m_{t1i} \cdot m_{t1i}}{I_{pi} \cdot G_i} \cdot dx = \sum_{i=1}^3 \frac{m_{t1i} \cdot m_{t1i} \cdot l_i}{I_{pi} \cdot G_i},$$

$$q_{1F} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{ti} \cdot m_{tli}}{I_{pi} \cdot G_i} \cdot dx = \sum_{i=1}^3 \frac{M_{ti} \cdot m_{tli} \cdot l_i}{I_{pi} \cdot G_i}.$$

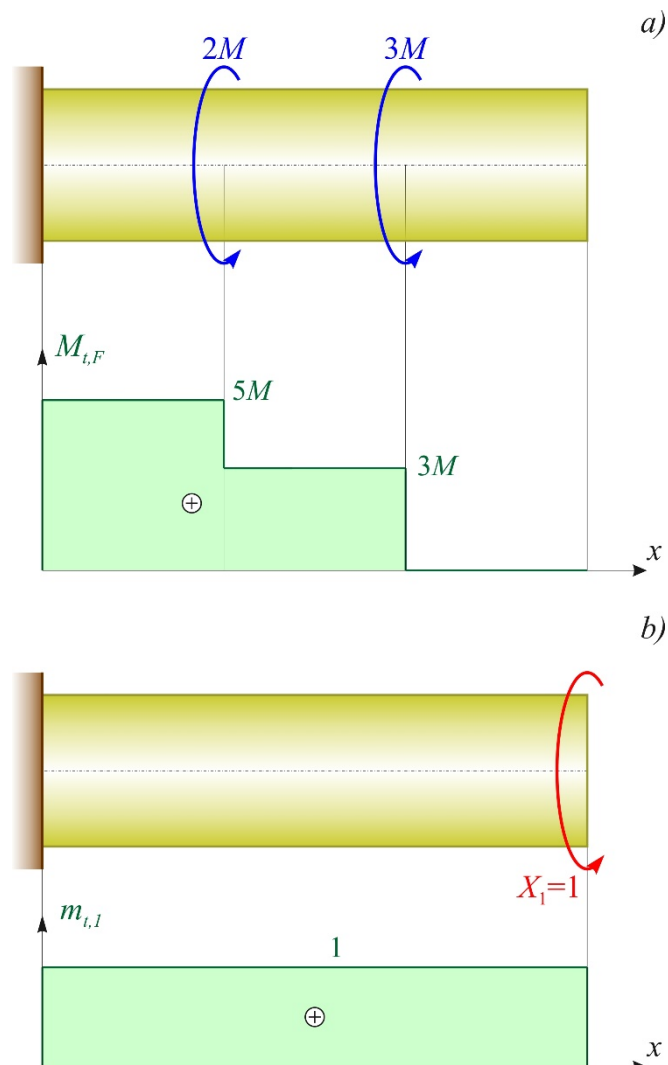
Dalje je:

$$f_{11} = \frac{1}{G \cdot I_p} \cdot (1 \cdot 3 \cdot l \cdot 1) = 3 \cdot \frac{l}{G \cdot I_p},$$

$$q_{1F} = \frac{1}{G \cdot I_p} \cdot (5 \cdot M \cdot l \cdot 1 + 3 \cdot M \cdot l \cdot 1) = 8 \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

Sada je:

$$X_1 = -\frac{q_{1F}}{\alpha_{11}} = -\frac{8}{3} \cdot M.$$



Slika 5.6. Primjer 5.2.

Momenti uvijanja u presjecima štapa mogu se dobiti kako slijedi:

$$M_{ti} = m_{tli} \cdot X_1 + M_{tiF},$$

- I. područje: $0 \leq x \leq l$

$$M_{I1} = 1 \cdot \left(-\frac{8}{3} \cdot M \right) + 5 \cdot M = \frac{7}{3} \cdot M ;$$

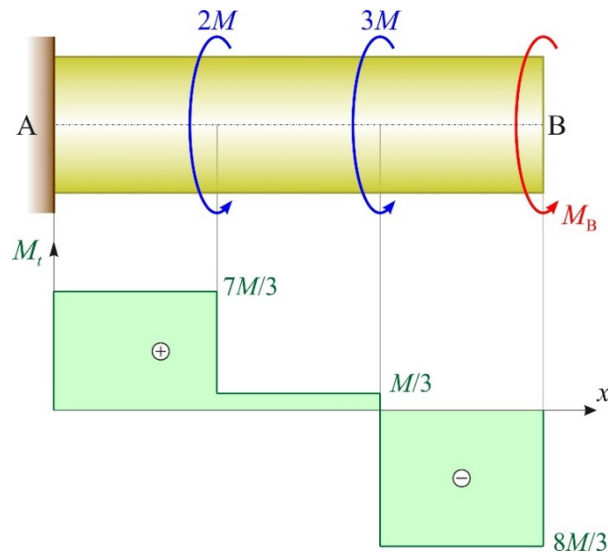
- II. područje: $l \leq x \leq 2 \cdot l$

$$M_{I2} = 1 \cdot \left(-\frac{8}{3} \cdot M \right) + 3 \cdot M = \frac{1}{3} \cdot M ;$$

- III. područje: $2 \cdot l \leq x \leq 3 \cdot l$

$$M_{I3} = 1 \cdot \left(-\frac{8}{3} \cdot M \right) + 0 = -\frac{8}{3} \cdot M .$$

Dijagram momenta uvijanja dan je na slici 5.7.



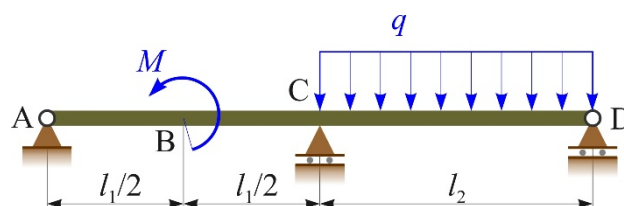
Slika 5.7. Primjer 5.2.

5.3. SAVIJANJE

Primjer 5.3.

Linijski nosač na trima osloncima zadan je i opterećen prema slici 5.8. Primjenom metode sila treba odrediti dijagrame unutarnjih sila.

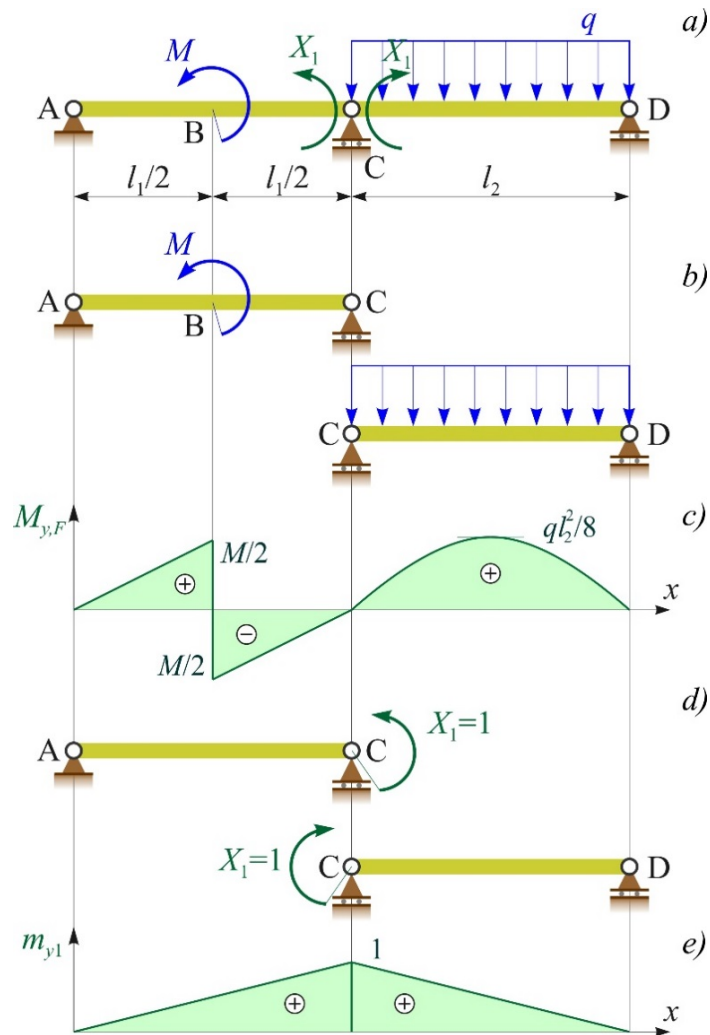
Zadano je: q , l , E , I_y te $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $M = 3 \cdot q \cdot l^2$.



Slika 5.8. Primjer 5.3.

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen, a ekvivalentan statički određen nosač može se dobiti na više načina. Ovdje je kao najjednostavniji način za proračun odabran osnovni nosač, tako da je iznad oslonca C umetnut zglob, a lijevo i desno od oslonca dodani su momenti savijanja označeni X_1 , što je prikazano na slici 5.9.a.



Slika 5.9. Primjer 5.3.

Dakle, momenti X_1 predstavljaju momente savijanja u bliskim presjecima lijevo i desno od oslonca C. Umetanjem zgloba od zadanoga linijskog nosača dobivena su dva odvojena nosača s osloncima na krajevima sa zadanim opterećenjem (slika 5.9.b). Za ova dva nosača momenti X_1 predstavljaju vanjsko opterećenje (slika 5.9.d).

Osnovna jednažba metode sila (5.1) jest:

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0.$$

Prije izračunavanja koeficijenata f_{11} i q_{1F} potrebno je odrediti dijagrame momenata savijanja $M_{y,F}$ statički određenog nosača zbog djelovanja vanjskog opterećenja (slika 5.9.b i 5.9.c) i

dijagram momenta savijanja m_{y1} statički određenog nosača od jediničnog momenta $X_1 = 1$ (slika 5.9.d i 5.9.e).

Koeficijenti f_{11} i q_{1F} mogu se dobiti korištenjem Mohrova integrala prema izrazima:

$$f_{11} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{m_{y1i} \cdot m_{y1i}}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx, \quad q_{1F} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{y,Fi} \cdot m_{y1i}}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx.$$

Primjenom Vereščaginova pravila na gornje izraze dobije se:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)$$

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y},$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \left(-\frac{M}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot l_2 \cdot \frac{q \cdot l_2^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right]$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(-\frac{M}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right]$$

$$q_{1F} = \frac{1}{12} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y}.$$

Nepoznati moment savijanja sada je:

$$X_1 = -\frac{q_{1F}}{\alpha_{11}} = -\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2.$$

Momenti savijanja u karakterističnim točkama računaju se prema jednadžbi:

$$M_y = m_{y1} \cdot X_1 + M_{y,F}.$$

Dalje su momenti savijanja u karakterističnim točkama:

$$M_{y,A} = 0;$$

$$M_{y,B}^l = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2 \right) + \frac{M}{2} = -\frac{1}{32} \cdot q \cdot l^2 + \frac{3}{2} \cdot q \cdot l^2 = \frac{47}{32} \cdot q \cdot l^2 = 1,469 \cdot q \cdot l^2;$$

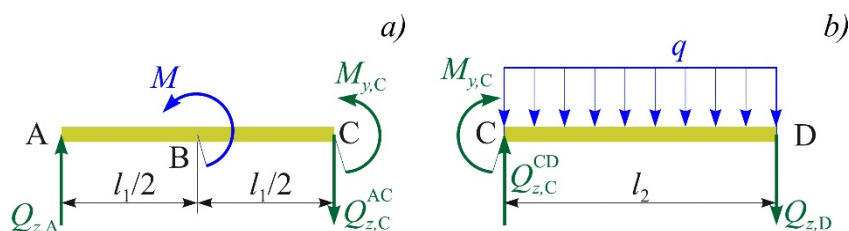
$$M_{y,B}^d = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2 \right) - \frac{M}{2} = -\frac{1}{32} \cdot q \cdot l^2 - \frac{3}{2} \cdot q \cdot l^2 = -\frac{49}{32} \cdot q \cdot l^2 = -1,531 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,C} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2 \right) + 0 = -\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2 = -0,063 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,D} = 0.$$

U B djeluje koncentrirani moment pa su izračunane vrijednosti momenta savijanja u bliskim presjecima lijevo i desno od točke B, $M_{y,B}^l$ i $M_{y,B}^d$ (u momentnom dijagramu zbog toga postoji skok).

Poprečne sile mogu se dobiti razmatranjem ravnoteže odsječenih dijelova nosača nakon što su određeni momenti savijanja (slika 5.10.a i 5.10.b).



Slika 5.10. *Primjer 5.3.*

Uvjet ravnoteže odsječenog dijela AC glasi (slika 5.10.a):

$$\sum M_C = 0: -Q_{z,A} \cdot l_1 + M + M_{y,C} = 0,$$

odakle je:

$$Q_{z,A} = \frac{M + M_{y,C}}{l_1} = \frac{3 \cdot q \cdot l^2 - \frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2}{2 \cdot l} = \frac{47}{32} \cdot q \cdot l = 1,469 \cdot q \cdot l.$$

Na isti način prema slici 5.10.b iz uvjeta ravnoteže odsječenog dijela CD može se dobiti:

$$\sum M_D = 0: -Q_{z,C}^{\text{CD}} \cdot l_2 - M_{y,C} + q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{\text{CD}} = \frac{-M_{y,C} + q \cdot \frac{l_2^2}{2}}{l_2} = \frac{-\left(-\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2\right) + 2 \cdot q \cdot l^2}{2 \cdot l} = \frac{33}{32} \cdot q \cdot l = 1,031 \cdot q \cdot l.$$

Lokalni ekstrem momenta savijanja dobije se kako slijedi:

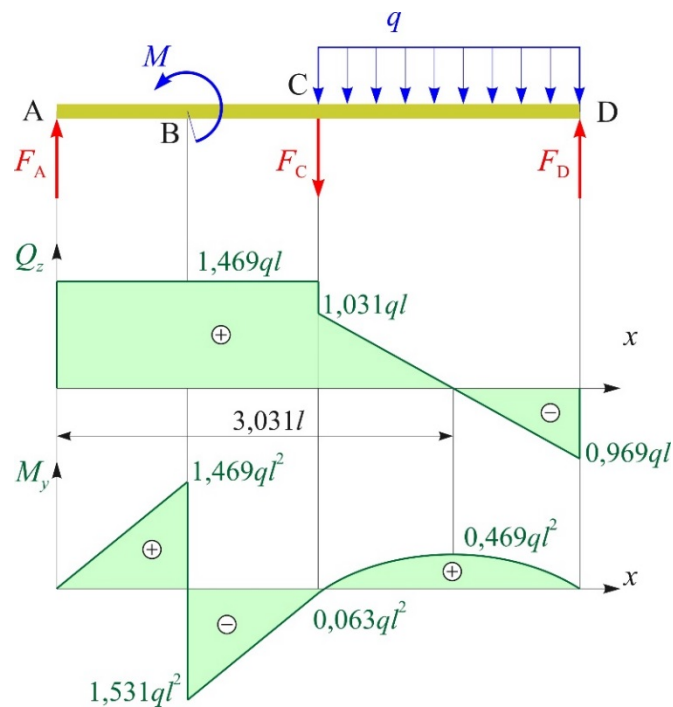
$$Q_z = Q_{z,C}^{\text{CD}} - q \cdot x = \frac{33}{32} \cdot q \cdot l - q \cdot x = 0, \quad x = \frac{33}{32} \cdot l,$$

$$M_{y,\text{max}} = M_{y,C} + Q_{z,C}^{\text{CD}} \cdot \frac{33}{32} \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(\frac{33}{32} \cdot l\right)^2,$$

$$M_{y,\text{max}} = -\frac{1}{16} \cdot q \cdot l^2 + \frac{33}{32} \cdot q \cdot l \cdot \frac{33}{32} \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(\frac{33}{32} \cdot l\right)^2,$$

$$M_{y,\text{max}} = \frac{961}{2048} \cdot q \cdot l^2 = 0,469 \cdot q \cdot l^2.$$

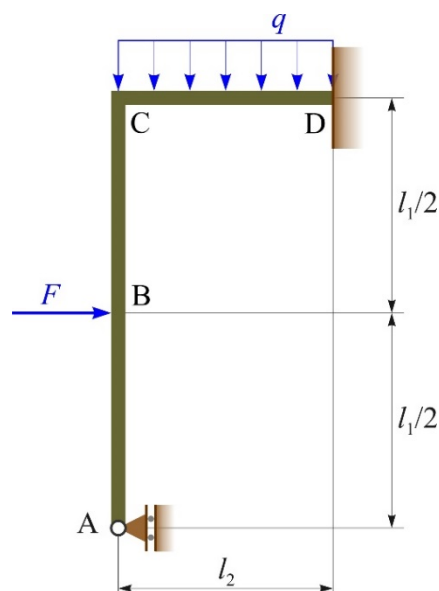
Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 5.11.



Slika 5.11. *Primjer 5.3.*

Primjer 5.4.

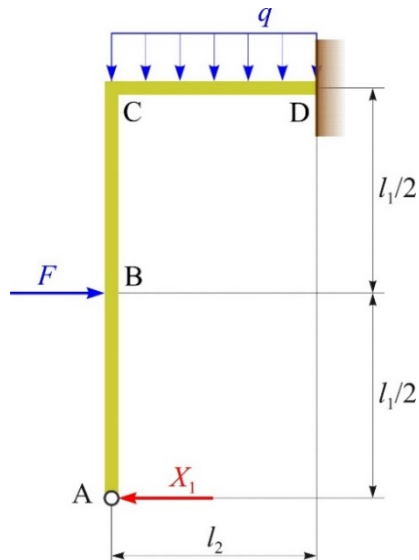
Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici 5.12. Valja odrediti dijagrame unutarnjih sila pomoću metode sila ako je zadano: q , l , E , I_y te $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$, $F = 2 \cdot q \cdot l$.



Slika 5.12. *Primjer 5.4.*

Rješenje:

Zadatak je jedanput statički neodređen, a ekvivalentan statički određen nosač (slika 5.13.) dobiven je iz zadanoga uklanjanjem jedne suvišne veze koja je zamijenjena nepoznatom reakcijom X_1 .



Slika 5.13. *Primjer 5.4.*

Osnovna jednađba metode sila glasi:

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0.$$

Koeficijenti f_{11} i q_{1F} mogu se odrediti na prije opisan način. Potrebno je najprije dobiti dijagram momenata savijanja $M_{y,F}$ za statički određen nosač zbog djelovanja vanjskog opterećenja te dijagram momenta savijanja od jedinične sile $X_1 = 1$ (slika 5.14.).

Za dijagram momenta savijanja od vanjskog opterećenja korištena je metoda superpozicije, tj. posebno je nacrtan dijagram od djelovanja koncentrirane sile, a posebno od kontinuiranog opterećenja.

Koeficijenti f_{11} i q_{1F} mogu se dobiti prema izrazima:

$$f_{11} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{m_{y1i} \cdot m_{y1i}}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx, \quad q_{1F} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{M_{y,Fi} \cdot m_{y1i}}{I_{yi} \cdot E_i} \cdot dx.$$

Dalje je primjenom Vereščaginova pravila:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_1 + l_2 \cdot l_1 \cdot l_1 \right)$$

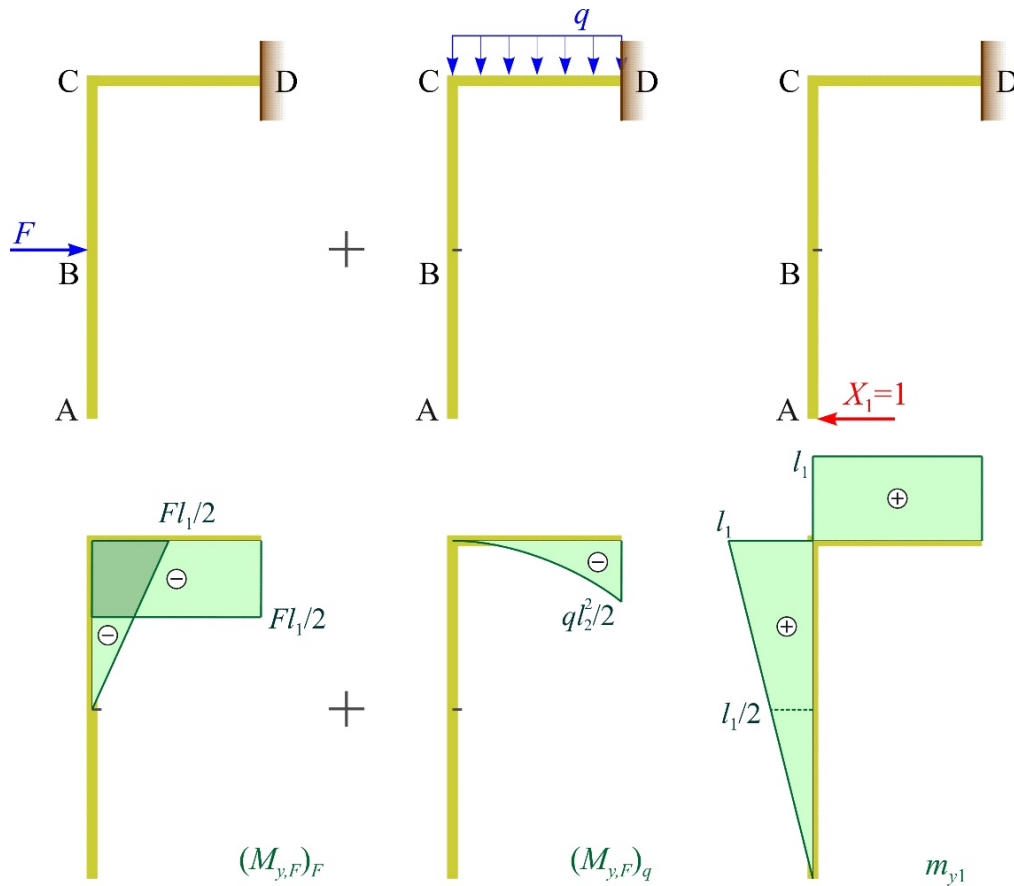
$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot l + l \cdot 2 \cdot l \cdot 2 \cdot l \right) = \frac{20}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y},$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \left(-F \cdot \frac{l_1}{2} \right) \cdot \frac{5}{6} \cdot l_1 + \left(-F \cdot \frac{l_1}{2} \right) \cdot l_2 \cdot l_1 + \frac{1}{3} \cdot l_2 \cdot \left(-\frac{q \cdot l_2^2}{2} \right) \cdot l_1 \right]$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(-F \cdot l \right) \cdot \frac{5}{3} \cdot l + \left(-F \cdot l \right) \cdot l \cdot 2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot l \cdot \left(-\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot 2 \cdot l \right],$$

te za $F = 2 \cdot q \cdot l$

$$q_{1F} = -6 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}$$



Slika 5.14. Primjer 5.4.

Nepoznata reakcija sada je:

$$X_1 = -\frac{q_{1F}}{\alpha_{11}} = \frac{9}{10} \cdot q \cdot l$$

Momenti savijanja u karakterističnim točkama mogu se dobiti prema:

$$M_y = m_{y1} \cdot X_1 + M_{y,F}$$

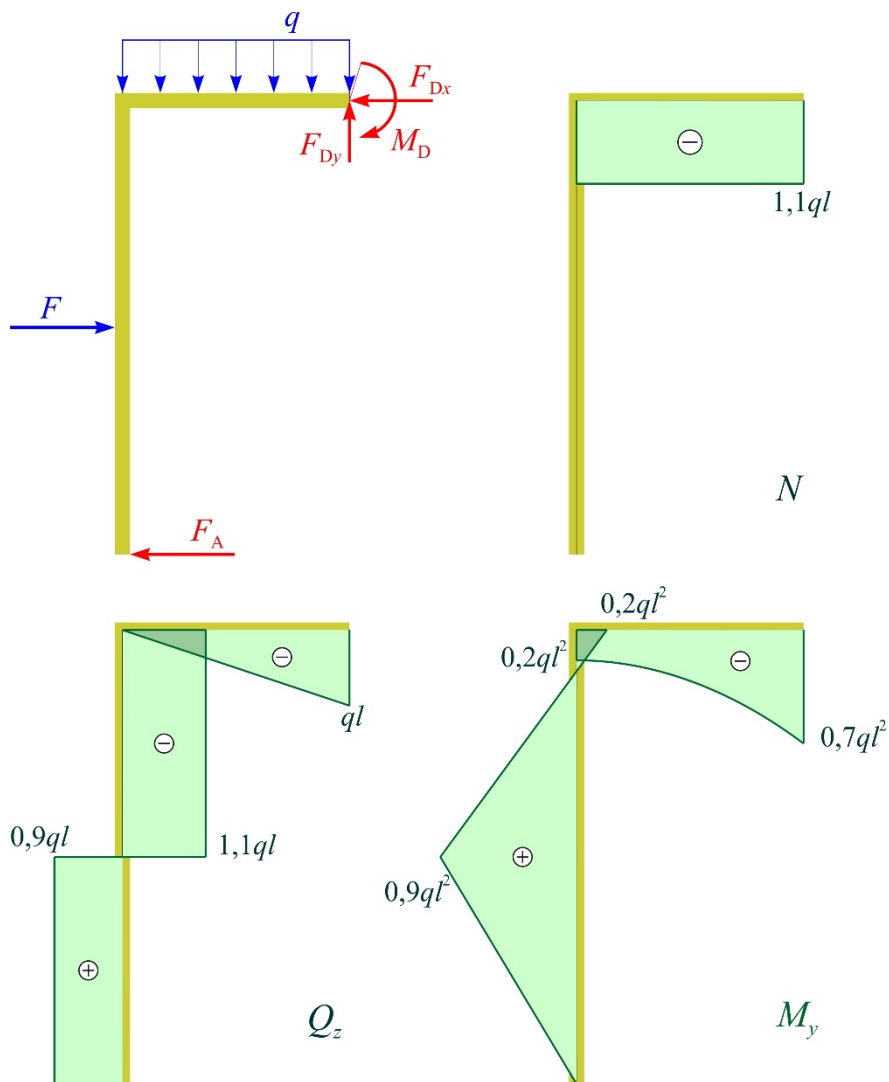
$$M_{y,A} = 0, \quad M_{y,B} = \frac{l_1}{2} \cdot \frac{9}{10} \cdot q \cdot l = \frac{9}{10} \cdot q \cdot l^2 = 0,9 \cdot q \cdot l^2$$

$$M_{y,C} = l_1 \cdot \frac{9}{10} \cdot q \cdot l - \frac{F \cdot l_1}{2} = \frac{18}{10} \cdot q \cdot l^2 - 2 \cdot q \cdot l^2 = -\frac{2}{10} \cdot q \cdot l^2 = -0,2 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,D} = l_1 \cdot \frac{9}{10} \cdot q \cdot l - F \cdot \frac{l_1}{2} - \frac{q \cdot l_2^2}{2} = \frac{18}{10} \cdot q \cdot l^2 - 2 \cdot q \cdot l^2 - \frac{q \cdot l^2}{2} = -\frac{7}{10} \cdot q \cdot l^2.$$

$$M_{y,D} = -0,7 \cdot q \cdot l^2.$$

Dijagrami unutarnjih sila dani su na slici 5.15.

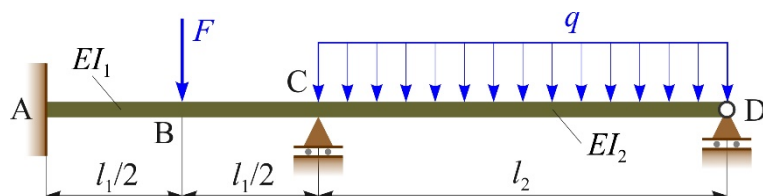


Slika 5.15. *Primjer 5.4.*

Primjer 5.5.

Linijski statički neodređen nosač zadan je i opterećen prema slici 5.16. Valja odrediti dijagrame unutarnjih sila pomoću metode sila.

Zadano je: q , l , E , I_y te $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 3 \cdot l$, $I_1 = I_y$, $I_2 = 2 \cdot I_y$, $F = 2 \cdot q \cdot l$.



Slika 5.16. *Primjer 5.5.*

Rješenje:

Zadatak je dva puta statički neodređen. Ekvivalentan statički određen nosač dobiven je iz zadanoga uklanjanjem uklještenja u A koje je zamijenjeno nepoznatim reakcijskim momentom

X_1 te umetanjem zgloba iznad oslonca C i dodavanjem nepoznatih momenata savijanja X_2 s lijeve i desne strane presjeka (slika 5.17.a). Time su zapravo dobivena dva jednostavna nosača kao što pokazuje slika 5.17.b.

Kanonske jednadžbe metode sila sada prema (5.2) glase:

$$f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} = 0$$

$$f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} = 0.$$

U prvom koraku treba dobiti dijagrame momenta savijanja $M_{y,F}$ zbog djelovanja vanjskog opterećenja (slike 5.17.b i 5.17.c) te dijagram momenta savijanja zbog djelovanja nepoznatih momenata $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ (slika 5.17.d).

Koeficijenti podatnosti i slobodni članovi u gornjim jednadžbama mogu se odrediti korištenjem Mohrova integrala i Vereščaginova pravila kako slijedi:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y},$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{E \cdot I_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y},$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{E \cdot I_2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y},$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \frac{F \cdot l_1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{F \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y},$$

$$q_{1F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y},$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \frac{F \cdot l_1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{E \cdot I_2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot l_2 \cdot \frac{q \cdot l_2^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right)$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot \frac{F \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot l \cdot \frac{9}{8} \cdot q \cdot l^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{17}{16} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y}.$$

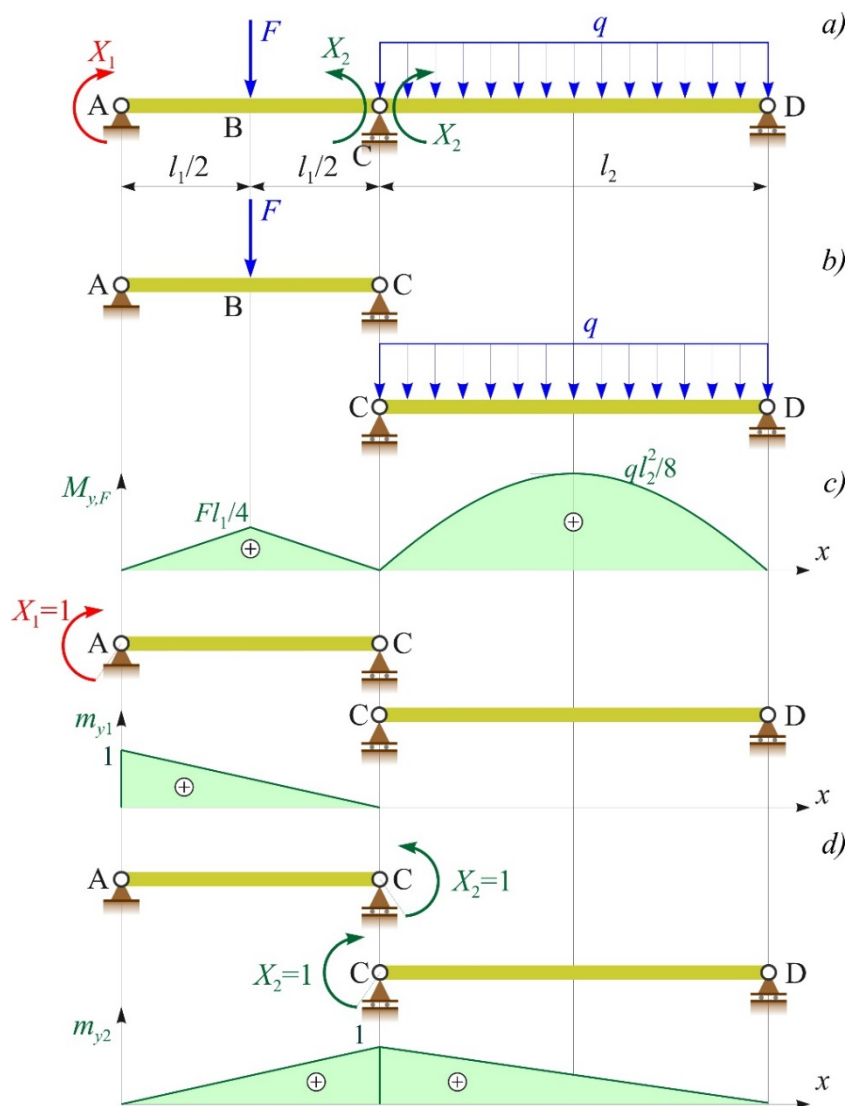
Dalje je:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y} \cdot X_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{E \cdot I_y} \cdot X_2 + \frac{17}{16} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednačaba dobije se:

$$X_1 = -\frac{11}{32} \cdot q \cdot l^2 = -0,344 \cdot q \cdot l^2; \quad X_2 = -\frac{13}{16} \cdot q \cdot l^2 = -0,813 \cdot q \cdot l^2.$$



Slika 5.17. Primjer 5.5.

Momenti savijanja u karakterističnim točkama mogu se dobiti prema:

$$M_y = m_{y1} \cdot X_1 + m_{y2} \cdot X_2 + M_{y,F},$$

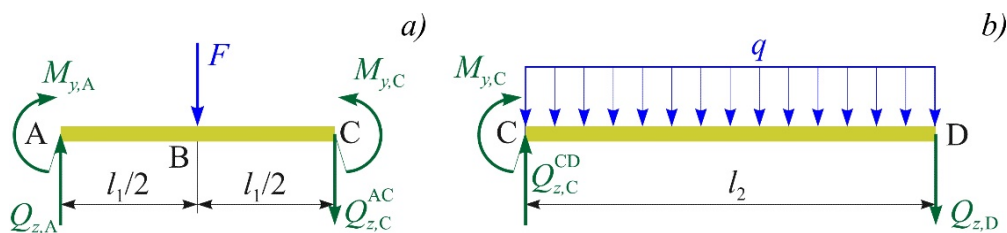
$$M_{y,A} = 1 \cdot (-0,344 \cdot q \cdot l^2) + 0 + 0 = -0,344 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B} = 0,5 \cdot (-0,344 \cdot q \cdot l^2) + 0,5 \cdot (-0,813 \cdot q \cdot l^2) + \frac{F \cdot l_1}{4} = 0,422 \cdot q \cdot l^2$$

$$M_{y,C} = 0 + 1 \cdot (-0,813 \cdot q \cdot l^2) + 0 = -0,813 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,D} = 0.$$

Poprečne sile mogu se dobiti razmatranjem ravnoteže isječenih dijelova nosača između dvaju presjeka u kojima su poznati momenti savijanja (slika 5.18.).



Slika 5.18. Primjer 5.5.

Iz uvjeta ravnoteže dijela AC slijedi:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0: & -Q_{z,A} \cdot l_1 - M_{y,A} + M_{y,C} + F \cdot \frac{l_1}{2} = 0 \\ -Q_{z,A} \cdot 2 \cdot l - M_{y,A} + M_{y,C} + F \cdot l & = 0, \\ Q_{z,A} & = \frac{-M_{y,A} + M_{y,C} + F \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{-(-0,344 \cdot q \cdot l^2) + (-0,813 \cdot q \cdot l^2) + 2 \cdot q \cdot l^2}{2 \cdot l}; \\ Q_{z,A} & = 0,766 \cdot q \cdot l; \\ \sum F_z = 0: & -Q_{z,A} + F + Q_{z,C}^{AC} = 0, \\ Q_{z,C}^{AC} & = Q_{z,A} - F = 0,766 \cdot q \cdot l - 2 \cdot q \cdot l = -1,234 \cdot q \cdot l. \end{aligned}$$

Na isti način iz uvjeta ravnoteže dijela CD može se dobiti prema:

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0: & -Q_{z,C}^{CD} \cdot l_2 - M_{y,C} + q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} = 0 \\ -Q_{z,C}^{CD} \cdot 3 \cdot l - M_{y,C} + 3 \cdot q \cdot l \cdot 1,5 \cdot l & = 0, \\ Q_{z,C}^{CD} & = \frac{-(-0,813 \cdot q \cdot l^2) + 4,5 \cdot q \cdot l^2}{3 \cdot l} = 1,771 \cdot q \cdot l; \\ \sum F_z = 0: & -Q_{z,C}^{CD} + q \cdot l_2 + Q_{z,D} = 0 \\ -Q_{z,C}^{CD} + 3 \cdot q \cdot l + Q_{z,D} & = 0, \\ Q_{z,D} & = Q_{z,C}^{CD} - 3 \cdot q \cdot l = 1,771 \cdot q \cdot l - 3 \cdot q \cdot l = -1,229 \cdot q \cdot l. \end{aligned}$$

Lokalni ekstrem za moment savijanja na dijelu CD može se dobiti kako slijedi:

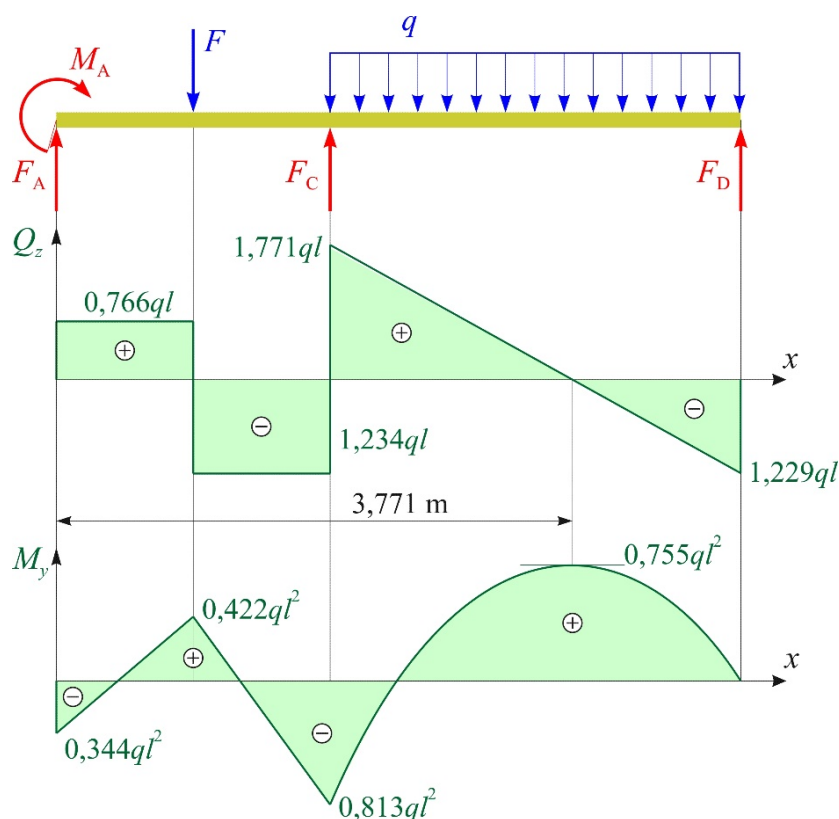
$$\begin{aligned} Q_z & = Q_{z,C}^{CD} - q \cdot x = 1,771 \cdot q \cdot l - q \cdot x = 0; \\ x & = 1,771 \cdot l, \end{aligned}$$

$$M_{y,\max} = M_{y,C} + Q_{z,C}^{\text{CD}} \cdot 1,771 \cdot l - q \cdot \frac{(1,771 \cdot l)^2}{2}$$

$$M_{y,\max} = -0,813 \cdot q \cdot l^2 + 1,771 \cdot q \cdot l \cdot 1,771 \cdot l - q \cdot \frac{(1,771 \cdot l)^2}{2}$$

$$M_{y,\max} = 0,755 \cdot q \cdot l^2.$$

Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 5.19.



Slika 5.19. *Primjer 5.5.*

Primjer 5.6.

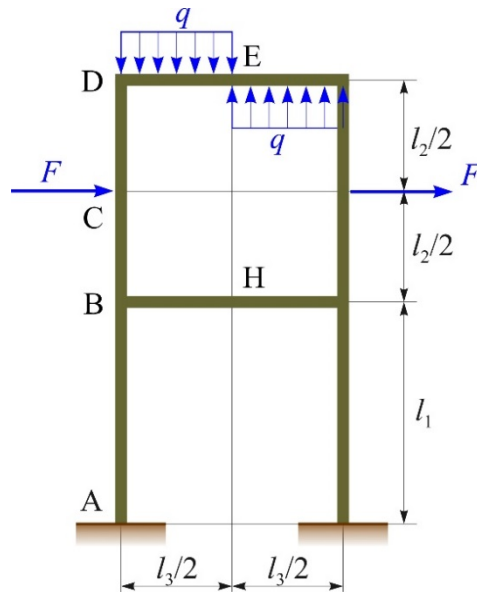
Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici 5.20. Primjenom metode sila valja odrediti dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: q , l , E , I_y te $l_1 = l$, $l_2 = l$, $l_3 = l$, $F = 0,5 \cdot q \cdot l$.

Rješenje:

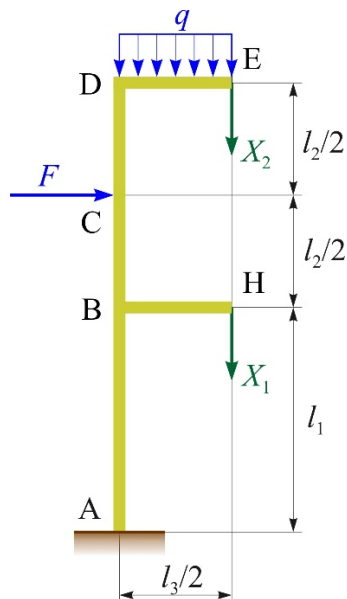
Zadatak je šest puta statički neodređen. Dakle, trebalo bi postaviti šest jednadžaba da bi se zadatak riješio. Budući da je zadana konstrukcija simetrična i uz to opterećena antisimetrično, može se rješavanje zadatka bitno pojednostavniti korištenjem svojstva simetrije.

To svojstvo kaže: *ako je simetrična konstrukcija opterećena antisimetrično, u ravnini simetrije samo su antisimetrične komponente unutarnjih sila (poprečne sile) različite od nule.* Presijecanjem konstrukcije u ravnini simetrije može se razmatrati dio lijevo od presjeka.



Slika 5.20. *Primjer 5.6.*

Zbog toga osnovna, ekvivalentna statički neodređena konstrukcija izgleda kao što je prikazano na slici 5.21.,



Slika 5.21. *Primjer 5.6.*

a kanonske jednačbe metode sila glase:

$$f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} = 0$$

$$f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} = 0.$$

Momentni dijagrami zbog djelovanja vanjskog opterećenja kao i oni od jediničnih sila $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ dani su na slici 5.22.

Svi koeficijenti u gornjim jednačbama mogu se dobiti na prije opisan način pomoću Mohrova integrala i Vereščaginova pravila kako slijedi:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\left(-\frac{l_3}{2} \right) \cdot l_1 \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \right]$$

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[(-l) \cdot 2 \cdot l \cdot (-l) + \frac{1}{2} \cdot (-l) \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot (-l) \right] = \frac{7}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y},$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\left(-\frac{l_3}{2} \right) \cdot l_1 \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \right]$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot [(-l) \cdot 2 \cdot l \cdot (-l)] = 2 \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y},$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\left(-\frac{l_3}{2} \right) \cdot (l_1 + l_2) \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \right]$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[(-l) \cdot 4 \cdot l \cdot (-l) + \frac{1}{2} \cdot (-l) \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot (-l) \right] = \frac{13}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y},$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{-\frac{F \cdot l_2}{2} - F \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right)}{2} \cdot l_1 \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) - \frac{q \cdot l_3^2}{8} \cdot l_1 \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \right],$$

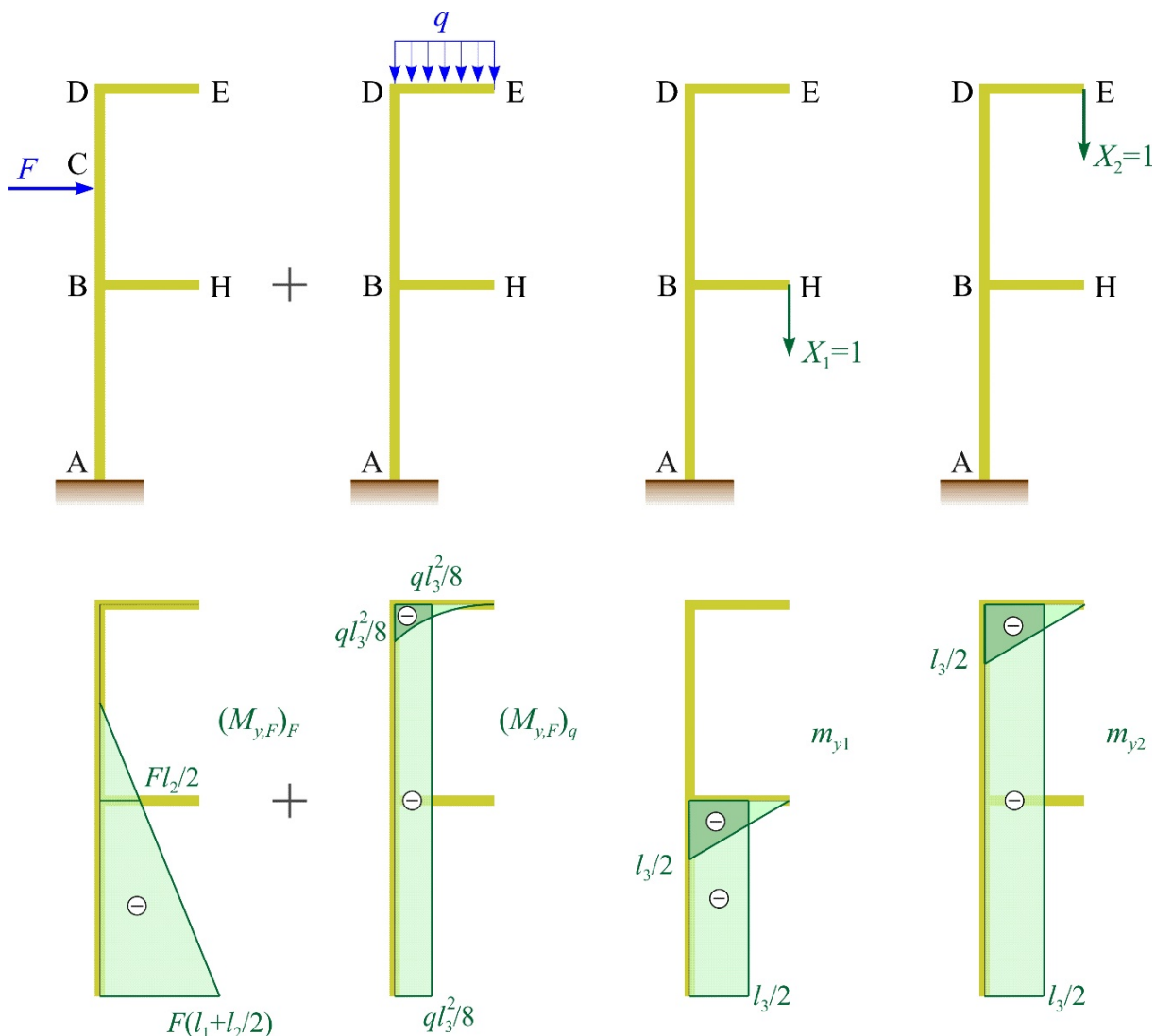
$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{-F \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right)}{2} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) + \left(-\frac{q \cdot l_3^2}{8} \right) \cdot (l_1 + l_2) \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) + \frac{-F \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right)}{2} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{q \cdot l_3^2}{8} \right) \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{l_3}{2} \right) \right]$$

pa je uz $F = 0,5 \cdot q \cdot l$, $l_1 = 2l$, $l_2 = 2l$, $l_3 = 2l$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{-q \cdot l^2 - 2 \cdot q \cdot l^2}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot (-l) \right] = 3 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y},$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{-0,5 \cdot q \cdot l^2 - 2 \cdot q \cdot l^2}{2} \cdot 3 \cdot l \cdot (-l) + \left(-\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot l \cdot (-l) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{q \cdot l^2}{2} \right) \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot (-l) \right]$$

$$q_{2F} = \frac{35}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}$$



Slika 5.22. Primjer 5.6.

Kanonske jednačbe metode sila glase:

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + 2 \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y} \cdot X_2 + 3 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y} = 0$$

$$2 \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + \frac{13}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y} \cdot X_2 + \frac{35}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y} = 0,$$

a njihovim rješavanjem dobije se:

$$X_1 = -0,695 \cdot q \cdot l, \quad X_2 = -0,689 \cdot q \cdot l.$$

Na već opisan način mogu se dobiti momenti savijanja u karakterističnim točkama kako slijedi:

$$M_y = m_{y1} \cdot X_1 + m_{y2} \cdot X_2 + M_{y,F},$$

$$M_{y,A} = (-l) \cdot (-0,695 \cdot q \cdot l) + (-l) \cdot (-0,689 \cdot q \cdot l) - 2 \cdot q \cdot l^2 = -0,616 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{AB} = (-l) \cdot (-0,695 \cdot q \cdot l) + (-l) \cdot (-0,689 \cdot q \cdot l) - q \cdot l^2 = 0,384 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{BD} = (-l) \cdot (-0,689 \cdot q \cdot l) - q \cdot l^2 = -0,311 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,C} = (-l) \cdot (-0,689 \cdot q \cdot l) - 0,5 \cdot q \cdot l^2 = 0,189 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,D} = (-l) \cdot (-0,689 \cdot q \cdot l) - 0,5 \cdot q \cdot l^2 = 0,189 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,E} = 0,$$

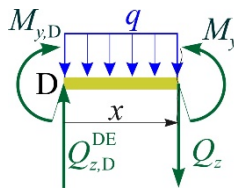
$$M_{y,H} = 0.$$

Lokalni ekstrem momenta savijanja na dijelu DE dobije se na već opisan način (slika 5.23):

$$Q_z = Q_{z,D} - q \cdot x = 0,311 \cdot q \cdot l - q \cdot x = 0; \quad x = 0,311 \cdot l,$$

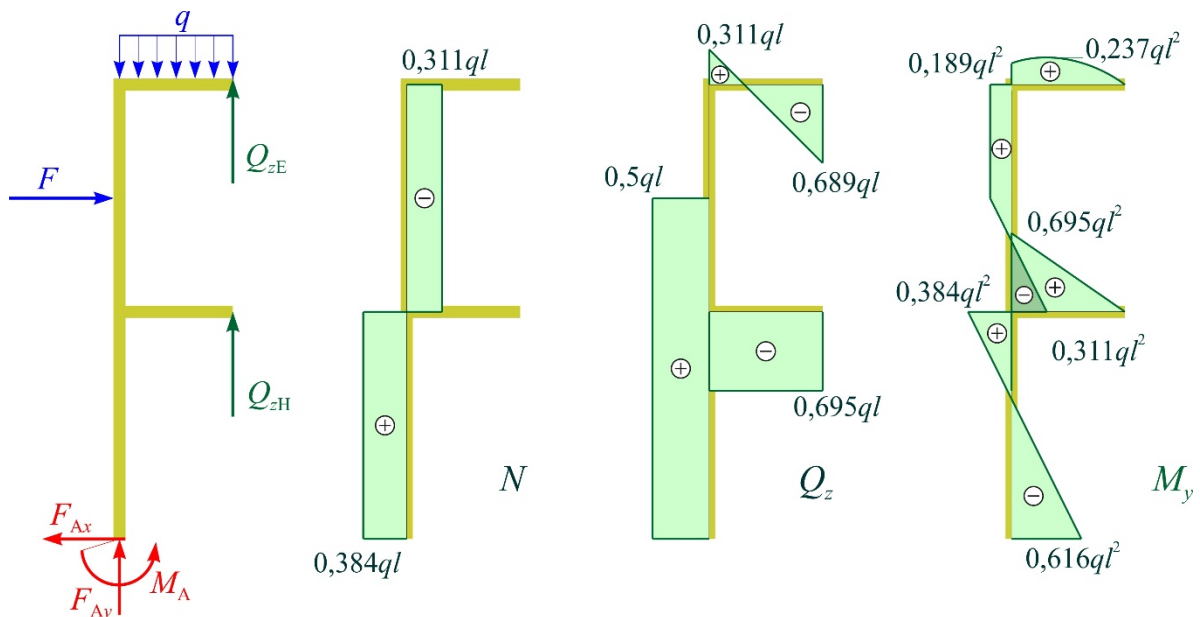
$$M_{y,\max} = M_{y,D} + 0,311 \cdot q \cdot l \cdot 0,311 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (0,311 \cdot l)^2$$

$$M_{y,\max} = 0,189 \cdot q \cdot l^2 + 0,5 \cdot q \cdot (0,311 \cdot l)^2 = 0,237 \cdot q \cdot l^2.$$



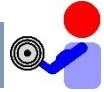
Slika 5.23. *Primjer 5.6.*

Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 5.24.



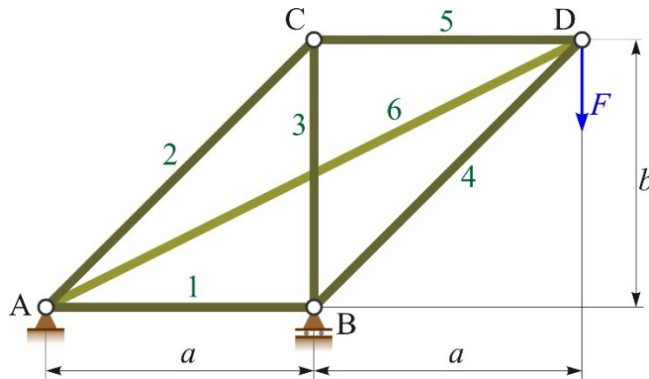
Slika 5.24. *Primjer 5.6.*

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 5.1. Za rešetkastu konstrukciju sastavljenu od šest štapova i opterećenu prema slici Z.5.1. potrebno je koristeći se metodom sila odrediti sile u štapovima.

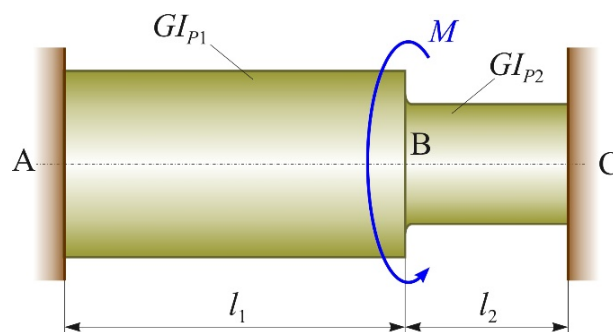
Zadano je: $F, l, A, E, a=l, b=l, F=10 \text{ kN}$.



Slika Z.5.1. Zadatak 5.1.

Zadatak 5.2. Za štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata i opterećen prema slici Z.5.2. potrebno je izračunati reakcijske momente te skicirati dijagram momenta uvijanja. Koristiti se metodom sila.

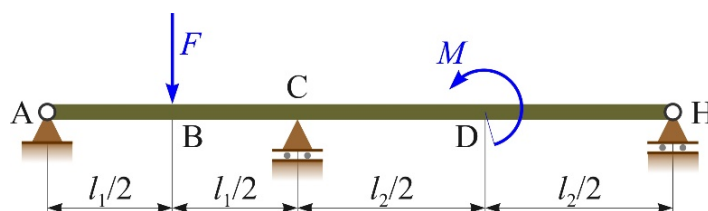
Zadano je: $M, l, I_p, G, l_1=2 \cdot l, l_2=l, I_{p1}=1,5 \cdot I_p, I_{p2}=I_p$.



Slika Z.5.2. Zadatak 5.2.

Zadatak 5.3. Linijski nosač zadan je i opterećen prema slici Z.5.3. Potrebno je skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila upotrebom metode sila.

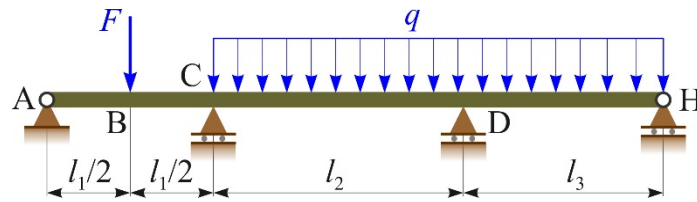
Zadano je: $l=1 \text{ m}, l_1=2 \cdot l, l_2=3 \cdot l, F=12 \text{ kN}, M=8 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika Z.5.3. Zadatak 5.3.

Zadatak 5.4. Za linijski nosač zadan i opterećen prema slici Z.5.4. potrebno je pomoću metode sila skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

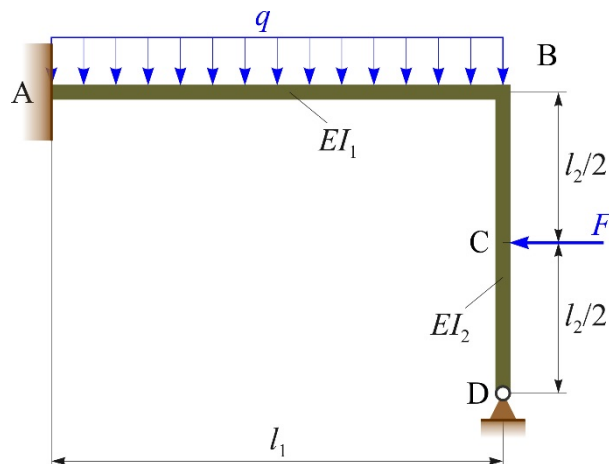
Zadano je: $l = 1 \text{ m}$, $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 3 \cdot l$, $l_3 = 2,4 \cdot l$, $F = 20 \text{ kN}$, $q = 8 \text{ kN/m}$.



Slika Z.5.4. Zadatak 5.4.

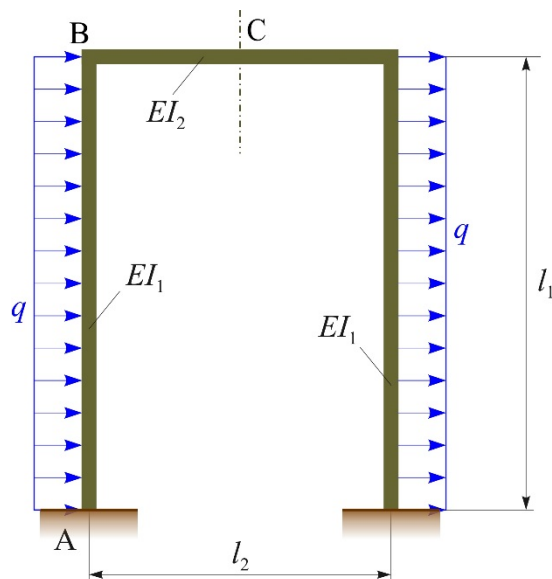
Zadatak 5.5. Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici Z.5.5. Pomoću metode sila potrebno je odrediti dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $l = 1 \text{ m}$, $l_1 = 3 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $I_1 = I_y$, $I_2 = 2 \cdot I_y$, $q = 8 \text{ kN/m}$, $F = 15 \text{ kN}$.



Slika Z.5.5. Zadatak 5.5.

Zadatak 5.6. Simetrična okvirna konstrukcija opterećena je asimetrično prema slici Z.5.6.



Slika Z.5.6. Zadatak 5.6.

Potrebno je odrediti dijagrame unutarnjih sila koristeći se metodom sila.

Zadano je: $l = 1 \text{ m}$, $l_1 = 3 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $I_1 = 2 \cdot I_y$, $I_2 = I_y$, $q = 12 \text{ kN/m}$.

6. METODA POMAKA

Kao i metoda sila i ova se metoda koristi za rješavanje statički neodređenih konstrukcija. Za razliku od metode sila kod koje se osnovna konstrukcija (ekvivalentna statički određena) dobije iz zadane uklanjanjem suvišnih veza, kod metode pomaka se osnovna kinematički određena konstrukcija dobije iz zadane umetanjem prekobrojnih veza kojima se sprječavaju kutni i linearni pomaci krutih čvorova.

Kod metode sila potrebno je odrediti statičku neodređenost, a kod metode pomaka kinematičku neodređenost konstrukcije.

Kinematička neodređenost računa se prema izrazu:

$$N = N_{\varphi} + N_{\Delta}, \quad (6.1)$$

gdje N_{φ} predstavlja broj krutih slobodnih čvorova konstrukcije, a N_{Δ} broj nezavisnih linearnih pomaka slobodnih čvorova pri čemu se zanemaruje rastezanje pojedinih dijelova konstrukcije.

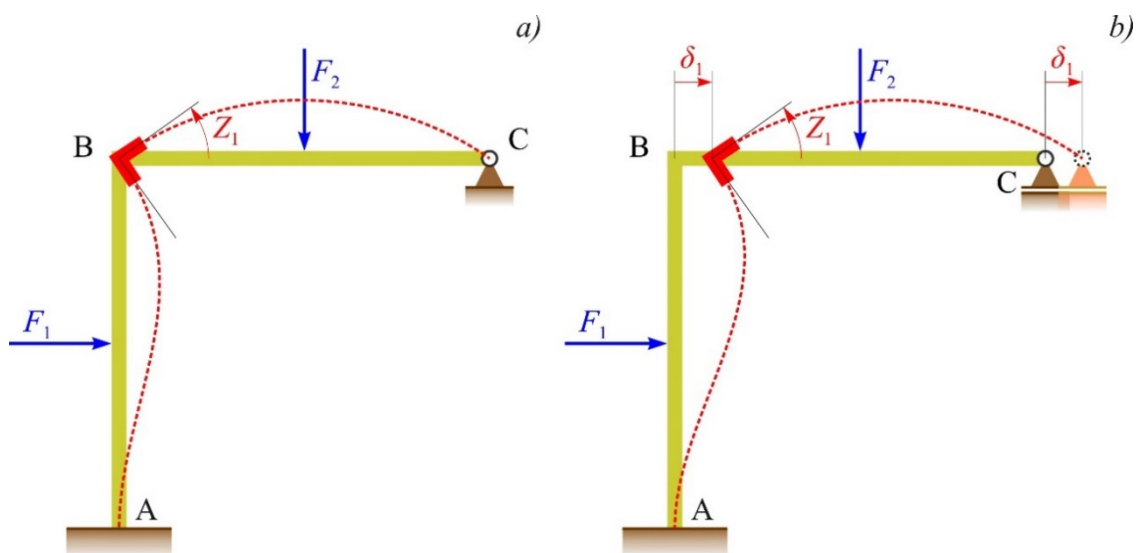
Tako je primjerice okvirni nosač na slici 6.1.a jedan put kinematički neodređen jer je:

$N_{\varphi} = 1$; kruti slobodni čvor B pri opterećenju konstrukcije može se zaokrenuti za kut Z_1 ;

$N_{\Delta} = 0$; kruti slobodni čvor B nema linearnog pomaka ako se zanemaruje rastezanje vertikalnog i horizontalnog dijela okvirnog nosača.

Prema (6.1) je sada:

$$N = N_{\varphi} + N_{\Delta} = 1 + 0 = 1.$$



Slika 6.1. a) okvirni nosač koji je jedanput kinematički neodređen, b) okvirni nosač koji je dva puta kinematički neodređen

Okvirni nosač na slici 6.1.b je dva puta kinematički neodređen jer je:

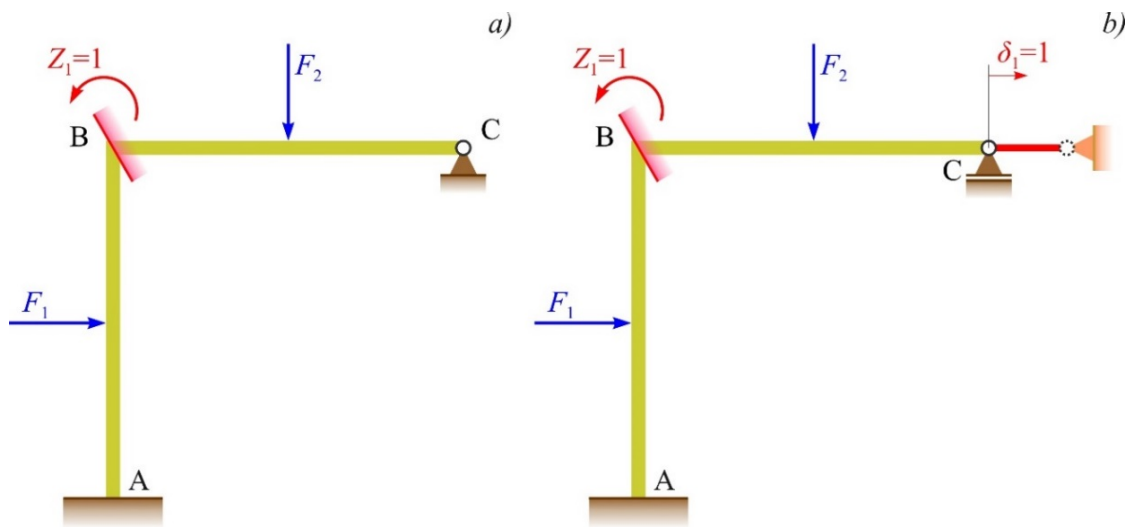
$N_\varphi = 1$; kruti slobodni čvor B pri opterećenju konstrukcije može se zaokrenuti za kut Z_1 ;

$N_\Delta = 1$; kruti slobodni čvor B i čvor C mogu imati linearni pomak δ_1 a da ne dođe do rastezanja horizontalnog dijela okvirnog nosača.

Prema (6.1) je sada:

$$N = N_\varphi + N_\Delta = 1 + 1 = 2.$$

Osnovna kinematički određena konstrukcija dobije se iz zadane umetanjem prekobrojnih veza kojima se sprječavaju kutni i linearni pomaci krutih čvorova.



Slika 6.2. a) osnovna kinematički određena konstrukcija za okvirni nosač prema slici 6.1.a, b) osnovna kinematički određena konstrukcija za okvirni nosač prema slici 6.1.b

Osnovna kinematički određena konstrukcija za okvirni nosač prema slici 6.1.a prikazana je na slici 6.2.a, dok je osnovna konstrukcija za okvirni nosač prema slici 6.1.b. prikazana na slici 6.2.b.

Kanonska jednadžba metode pomaka za okvirni nosač prema slici 6.1.a glasi:

$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0, \quad (6.2)$$

gdje su k_{11} koeficijent krutosti, a Q_{1F} slobodni član.

Koeficijent k_{11} u fizikalnom smislu predstavlja moment uklještenja u dodanoj vezi u čvoru B koji nastaje od jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ istog čvora, dok Q_{1F} predstavlja moment uklještenja u dodanoj vezi u čvoru B od vanjskog opterećenja.

Rješavanjem jednadžbe (6.2) dobije se kutni zakret $Z_1 = 1$ slobodnog čvora B.

Konačna vrijednost momenta savijanja u proizvoljnoj točki T okvirnog nosača dobije se prema izrazu:

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + M_{yF,T}. \quad (6.3)$$

Kanonske jednadžbe metode pomaka za okviri nosač prema slici 6.1.b glase:

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot Z_1 + k_{12} \cdot \delta_1 + Q_{1F} &= 0 \\ k_{21} \cdot Z_1 + k_{22} \cdot \delta_1 + Q_{2F} &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

gdje su k_{ij} koeficijenti krutosti, a Q_{iF} slobodni članovi.

Koeficijent k_{ij} u fizikalnom smislu predstavlja poopćenu silu u dodanoj vezi na mjestu **i** (bilo moment uklještenja u dodanom uklještenju bilo silu u dodanom štapu) nastalu od jediničnog poopćenog pomaka (bilo kutnog zakreta bilo linearnog pomaka) na mjestu **j**. Slobodni član Q_{iF} predstavlja poopćenu silu u dodanoj vezi na mjestu **i** od vanjskog opterećenja.

Za okviri nosač na slici 6.1.b te njemu kinematički ekvivalentni nosač na slici 6.2.b značenje koeficijenata krutosti i slobodnih članova je sljedeće:

k_{11} – moment uklještenja u dodanom uklještenju u čvoru B zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ istog čvora;

k_{12} – moment uklještenja u dodanom uklještenju u čvoru B zbog jediničnog linearnog pomaka $\delta_1 = 1$ čvorova B i C;

k_{21} – sila u dodanom štapu u čvoru C zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ čvora B;

k_{22} – sila u dodanom štapu u čvoru C zbog jediničnog linearnog pomaka $\delta_1 = 1$ čvorova B i C;

Q_{1F} – moment uklještenja u dodanom uklještenju u čvoru B zbog vanjskog opterećenja;

Q_{2F} – sila u dodanom štapu u čvoru C zbog vanjskog opterećenja.

Jednadžba (6.4) može se napisati u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_1 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} Q_{1F} \\ Q_{2F} \end{Bmatrix}. \quad (6.5)$$

Prvi član na lijevoj strani jednadžbe (6.4) naziva se matrica krutosti, a njezini članovi su koeficijenti krutosti. Drugi član na lijevoj strani je vektor nepoznanica (nepoznatih poopćenih pomaka), dok je na desnoj strani vektor slobodnih članova.

Rješavanjem matrične jednadžbe (6.5) dobiju se poopćeni pomaci: kutni zakret Z_1 čvora B i linearni pomak δ_1 čvorova B i C.

Konačna vrijednost momenta savijanja u proizvoljnoj točki T okvirnog nosača dobije se prema izrazu:

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + m_{2y,T} \cdot \delta_1 + M_{yF,T}. \quad (6.6)$$

U ovim skriptama razmatrat će se samo zadatci kod kojih postoje kutni zakreti slobodnih krutih čvorova, tj. za koje vrijedi $N_{\Delta} = 0$.

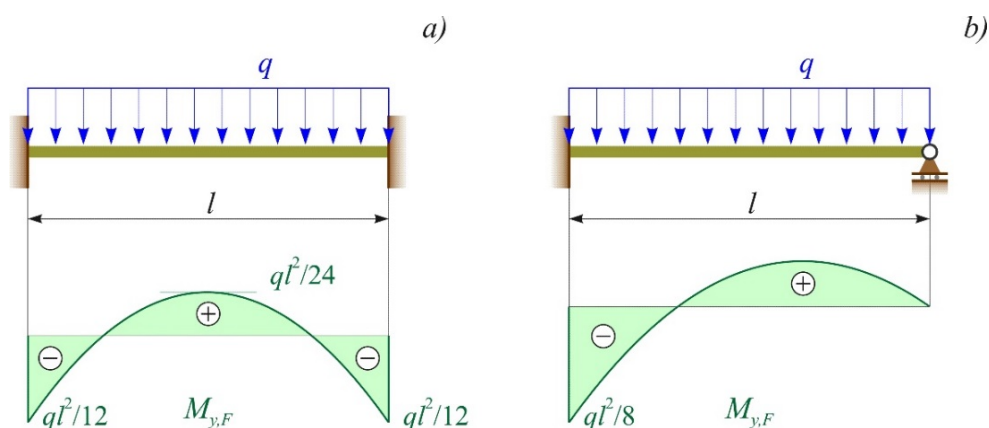
Kinematička neodređenost jednaka je prema (6.1.) broju slobodnih krutih čvorova:

$$N = N_{\varphi}.$$

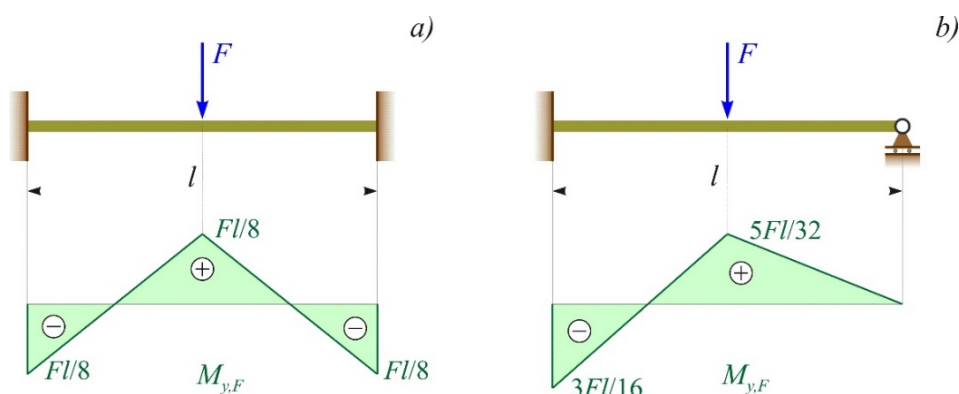
Umetanjem uklještenja na mjestima krutih čvorova sprječavaju se kutni zakreti, a konstrukcija je podijeljena na niz nosača koji su ili na oba kraja uklješteni ili su na jednom kraju uklješteni, a na drugom zgloбно vezani.

Nastali se nosači zbog vanjskog opterećenja savijaju te se ovisno o vanjskom opterećenju dobiju momenti savijanja prema slikama 6.3.a i b, odnosno 6.4.a i b.

Spomenuti dijagrami mogu se dobiti rješavanjem donjih statički neodređenih zadataka metodom sila.

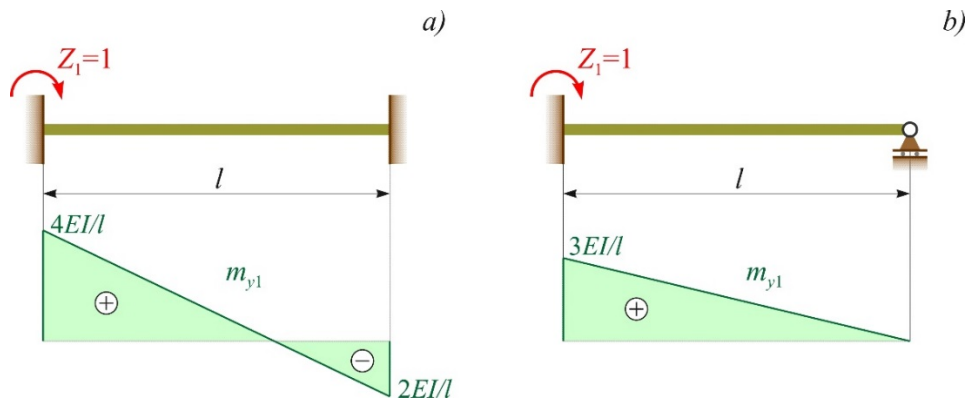


Slika 6.3. Nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem s dijagramom momenta savijanja: a) obostrano uklješten nosač, b) nosač na lijevom kraju uklješten, a na desnom zgloбно vezan za podlogu.



Slika 6.4. Nosač opterećen koncentriranom silom na sredini raspona s dijagramom momenta savijanja: a) obostrano uklješten nosač, b) nosač na lijevom kraju uklješten, a na desnom zgloбно vezan za podlogu.

Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestima umetnutih uklještenja dodaju odgovarajući kutni zakreti. Momenti savijanja nastali od jediničnog kutnog zakreta prikazani su slici 6.5.a i b.



Slika 6.5. Nosač opterećen jediničnim kutnim zakretom na lijevom kraju s dijagramom momenta savijanja: a) obostrano ukliješten nosač, b) nosač na lijevom kraju ukliješten, a na desnom zglobno vezan za podlogu.

U ovim skriptama razmatrat će se primjeri koji su jedanput kinematički neodređeni – kanonska jednadžba metode pomaka je prema izrazu (6.2), odnosno dva puta kinematički neodređeni – kanonske jednadžbe metode pomaka su prema izrazu (6.3).

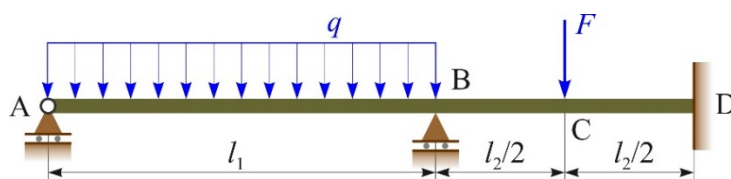
Za određivanje koeficijenata krutosti k_{ij} poslužit će dijagrami momenata savijanja prikazani na slici 6.5.a i 6.5.b, dok će za određivanje slobodnih članova Q_{iF} trebati dijagrami prikazani na slikama 6.3.a i 6.3.b te 6.4.a i 6.4.b.

Metoda pomaka detaljnije je objašnjena na primjerima koji slijede.

Primjer 6.1.

Za linijski nosač zadan i opterećen prema slici 6.6. valja odrediti dijagrame poprečnih sila i momenta savijanja koristeći se metodom pomaka.

Zadano je: q , l , $I_y = I$, E , $l_1 = 3 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $F = 2 \cdot q \cdot l$.



Slika 6.6. Primjer 6.1.

Rješenje:

Zadatak je jedanput kinematički neodređen (mogućnost zakretanja presjeka B).

Osnovna konstrukcija (ekvivalentna kinematički određena) dobije se iz zadane umetanjem dodatnog uklještenja u presjeku B, koje sprječava kutni pomak krutog čvora B.

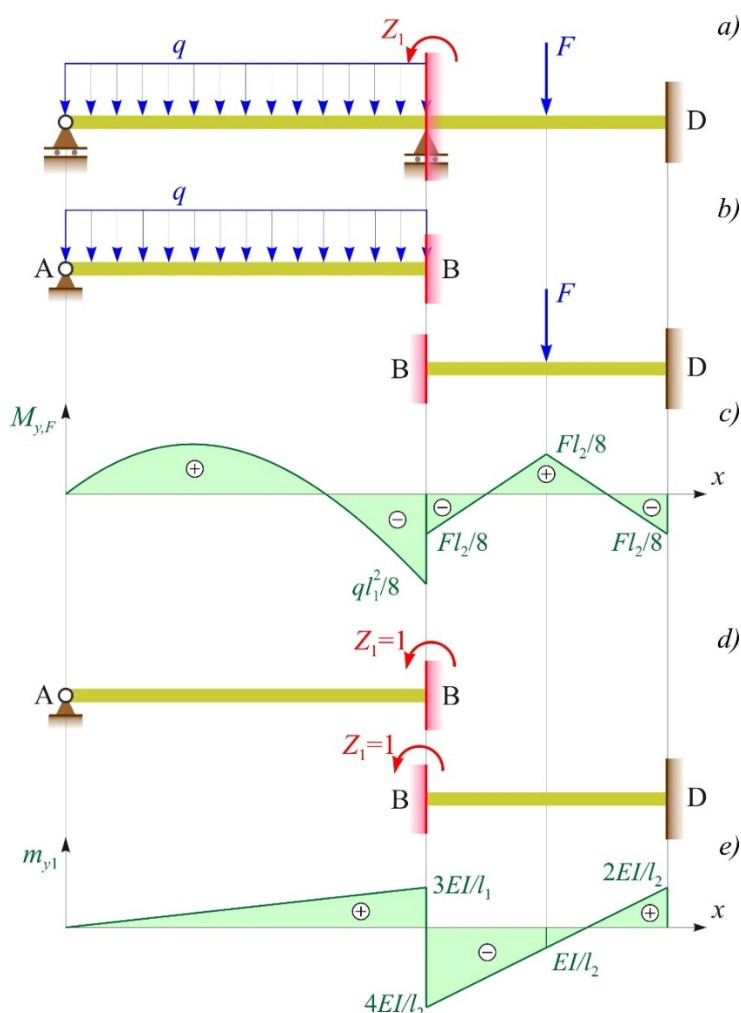
Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestu prekobrojne veze (uklještenje u B) doda odgovarajući kutni pomak Z_1 (slika 6.7.a). Time je osnovna konstrukcija svedena na dva odvojena nosača: nosač AB koji je u A zglobno vezan, a u B ukliješten te nosač BD koji je ukliješten na oba kraja (slika 6.7.b).

Osnovna jednađzba metode pomaka prema (6.2) glasi:

$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0,$$

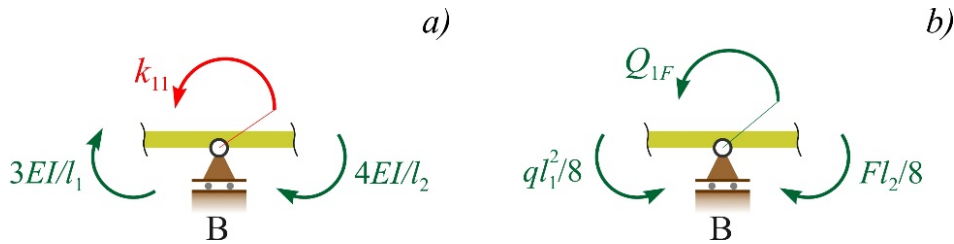
gdje su k_{11} koeficijent krutosti i Q_{1F} slobodni član. Njihovo fizikalno značenje je sljedeće: koeficijent k_{11} predstavlja moment na mjestu dodanog uklještenja zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$, dok Q_{1F} predstavlja moment na mjestu dodanog uklještenja zbog djelovanja vanjskog opterećenja. Ta dva momenta usmjerujemo u istu stranu kako smo usmjerili kutni zakret.

Dijagrami momenata savijanja dijelova AB i BD zbog djelovanja vanjskog opterećenja M_{yF} (slika 6.7.b) određuju se prema slici 6.3.b i 6.4.a te su prikazani na slici 6.7.c. Dijagrami momenata savijanja za dijelove AB i BD m_{y1} zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ (slika 6.7.d) određeni su prema slikama 6.5.b i 6.5.a i prikazani su slikom 6.7.e.



Slika 6.7. Primjer 6.1.

Koeficijent krutosti k_{11} dobije se iz momentne jednađzbe ravnoteže promatranjem ravnoteže dijela nosača između dvaju bliskih presjeka postavljenih lijevo i desno od krutog čvora B (slika 6.8.a) kako slijedi:



Slika 6.8. Primjer 6.1.

$$\sum M_B = 0: k_{11} - \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_1} - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_1} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l}.$$

Na isti je način određen slobodni član (slika 6.8.b):

$$\sum M_B = 0: Q_{1F} + \frac{q \cdot l_1^2}{8} - \frac{F \cdot l_2}{8} = 0,$$

$$Q_{1F} = -\frac{q \cdot l_1^2}{8} + \frac{F \cdot l_2}{8} = -\frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{8} + \frac{2 \cdot q \cdot l \cdot 2 \cdot l}{8} = -\frac{5}{8} \cdot q \cdot l^2.$$

U presjecima lijevo i desno od čvora B na slici 6.8. nacrtani su samo momenti savijanja jer se utjecaj poprečnih i uzdužnih sila na određivanje koeficijenta krutosti k_{11} i slobodnog člana Q_{1F} može zanemariti.

Iz osnovne jednačbe metode pomaka (6.2) dobije se sada kutni zakret:

$$Z_1 = -\frac{Q_{1F}}{k_{11}} = -\frac{-\frac{5}{8} \cdot q \cdot l^2}{\frac{3 \cdot E \cdot I}{l}} = \frac{5}{24} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}.$$

Konačne vrijednosti momenta savijanja u karakterističnim točkama nosača računaju se prema izrazu (6.3):

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + M_{yF,T}.$$

Sada je:

$$M_{y,A} = 0 \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} + 0 = 0,$$

$$M_{y,B}^{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_1} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{q \cdot l_1^2}{8} = \frac{3}{3 \cdot l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{24} - \frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{8} = -0,917 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{BD} = -\frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{F \cdot l_2}{8} = -\frac{4}{2 \cdot l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{24} - \frac{2 \cdot q \cdot l \cdot 2 \cdot l}{8} = -0,917 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,C} = -\frac{E \cdot I}{l_2} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} + \frac{F \cdot l_2}{8} = -\frac{1}{2 \cdot l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{24} + \frac{2 \cdot q \cdot l \cdot 2 \cdot l}{8} = 0,396 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,D} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{F \cdot l_2}{8} = \frac{2}{2 \cdot l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{24} - \frac{2 \cdot q \cdot l \cdot 2 \cdot l}{8} = -0,292 \cdot q \cdot l^2.$$

Iz dobivenih vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim točkama mogu se poprečne sile izračunati iz jednadžaba ravnoteže odsječenih dijelova nosača prema slici 6.9.

Za dio AB (slika 6.9.a) uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum M_B = 0: -Q_{z,A} \cdot l_1 + q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + M_{y,B}^{AB} = 0;$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,A} + q \cdot l_1 + Q_{z,B}^{AB} = 0.$$

Iz gornjih jednadžaba dobije se:

$$Q_{z,A} = \frac{q \cdot l_1^2}{2} + M_{y,B}^{AB} = \frac{0,5 \cdot q \cdot (3 \cdot l)^2 + (-0,917 \cdot q \cdot l^2)}{3 \cdot l} = 1,194 \cdot q \cdot l,$$

$$Q_{z,B}^{AB} = Q_{z,A} - q \cdot l_1 = 1,194 \cdot q \cdot l - q \cdot 3 \cdot l = -1,808 \cdot q \cdot l.$$

Budući da su predznaci gornjih poprečnih sila različiti, negdje između A i B poprečna sila jednaka je nuli i na tom je mjestu lokalni ekstrem funkcije momenta savijanja.

U proizvoljnom presjeku između A i B izrazi za poprečnu silu i moment savijanja glase:

$$Q_z = Q_{z,A} - q \cdot x = 0,194 \cdot q \cdot l - q \cdot x,$$

$$M_y = Q_{z,A} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 1,194 \cdot q \cdot l \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2.$$

Poprečna sila jednaka je nuli u presjeku udaljenom od presjeka A za

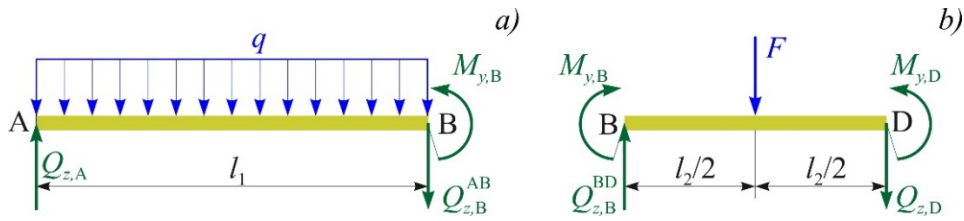
$$Q_z = Q_{z,A} - q \cdot x = 0,$$

$$x = \frac{Q_{z,A}}{q} = \frac{1,194 \cdot q \cdot l}{q} = 1,194 \cdot l.$$

Vrijednost lokalnog ekstrema momenta savijanja iznosi:

$$M_y = 1,194 \cdot q \cdot l \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2 = 1,194 \cdot q \cdot l \cdot 1,194 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (1,194 \cdot l)^2,$$

$$M_y = 0,713 \cdot q \cdot l^2.$$



Slika 6.9. *Primjer 6.1.*

Za dio BD (slika 6.9.b) uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum M_D = 0: -Q_{z,B}^{BD} \cdot l_2 - M_{y,B}^{BD} + F \cdot \frac{l_2}{2} + M_{y,D} = 0;$$

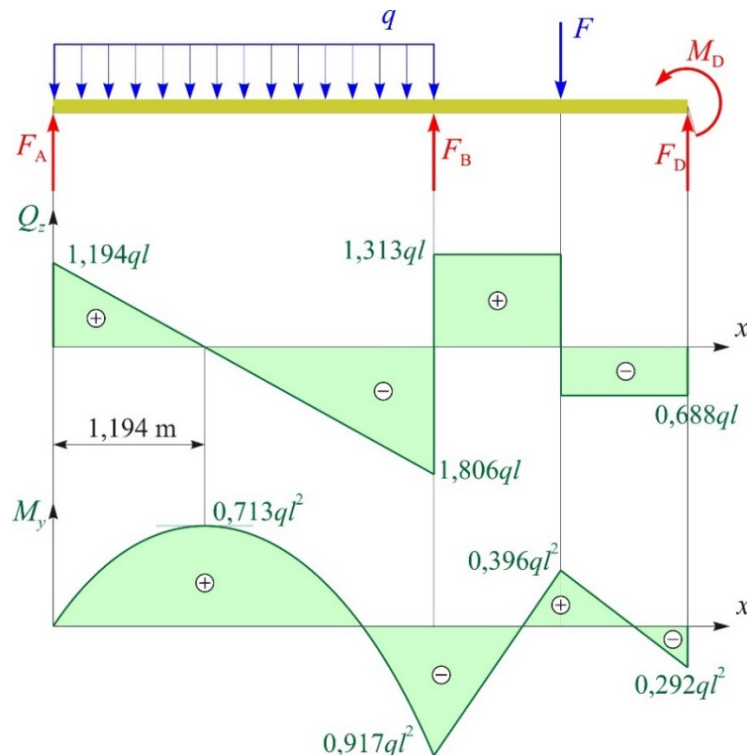
$$\sum F_z = 0: -Q_{z,B}^{BD} + F + Q_{z,D} = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednadžaba dobije se:

$$Q_{z,B}^{BD} = \frac{M_{y,D} - M_{y,B}^{BD}}{l_2} + \frac{F}{2} = \frac{-0,292 \cdot q \cdot l^2 - (-0,917 \cdot q \cdot l^2)}{2 \cdot l} + \frac{2 \cdot q \cdot l}{2} = 1,313 \cdot q \cdot l,$$

$$Q_{z,D} = Q_{z,B}^{BD} - F = 1,313 \cdot q \cdot l - 2 \cdot q \cdot l = -0,688 \cdot q \cdot l.$$

Prema dobivenim vrijednostima crtaju se dijagrami unutarnjih sila koji su prikazani na slici 6.10.

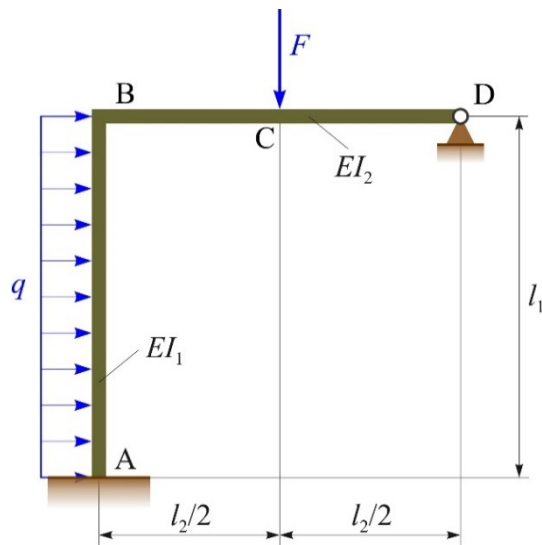


Slika 6.10. *Primjer 6.1.*

Primjer 6.2.

Za okvirni nosač zadan i opterećen prema slici 6.11. valja odrediti dijagrame uzdužnih sila, poprečnih sila i momenta savijanja.

Zadano je: $q, l, I_y, E, l_1 = 2 \cdot l, l_2 = 2 \cdot l, I_1 = I_y = I, I_2 = 2 \cdot I, F = 3 \cdot q \cdot l$.

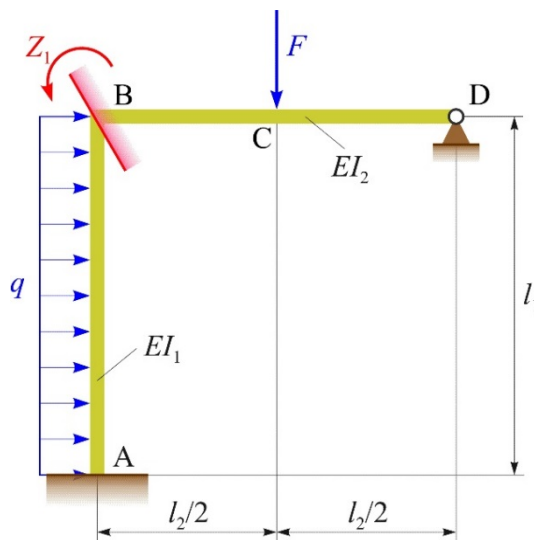


Slika 6.11. *Primjer 6.2.*

Rješenje:

Zadatak je jedanput kinematički neodređen (mogućnost zakretanja presjeka B).

Osnovna konstrukcija (ekvivalentna kinematički određena) dobije se iz zadane umetanjem dodatnog uklještenja u presjeku B, koje sprječava kutni pomak krutog čvora B.

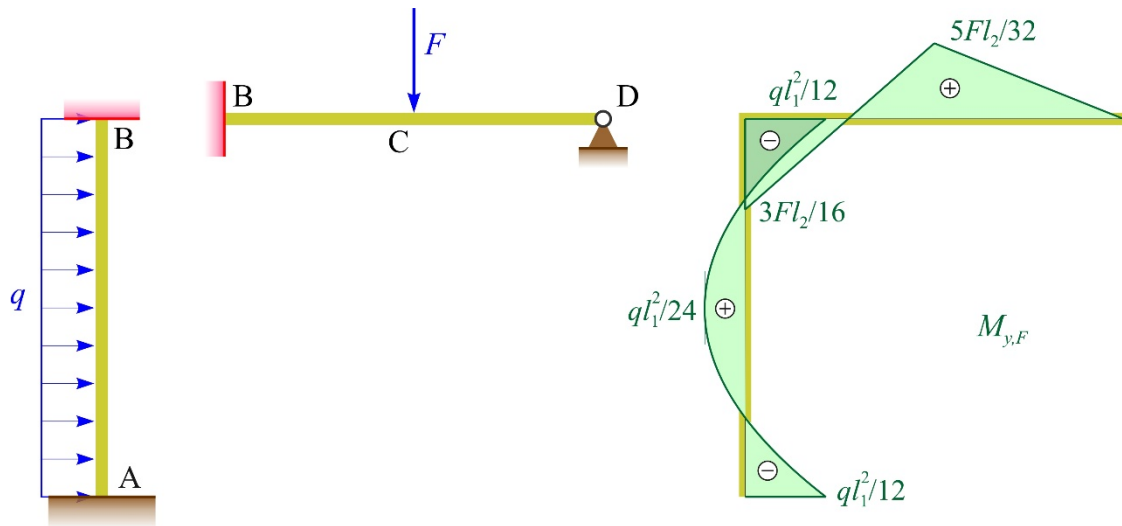


Slika 6.12. *Primjer 6.2.*

Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestu prekobrojne veze (uklještenje u B) doda odgovarajući kutni pomak Z_1 (slika 6.12.). Time je osnovna konstrukcija svedena na dva nosača: nosač AB koji je uklješten na oba kraja i nosač BD koji je uklješten na lijevom kraju a zglobno oslonjen na desnom kraju (slika 6.13.).

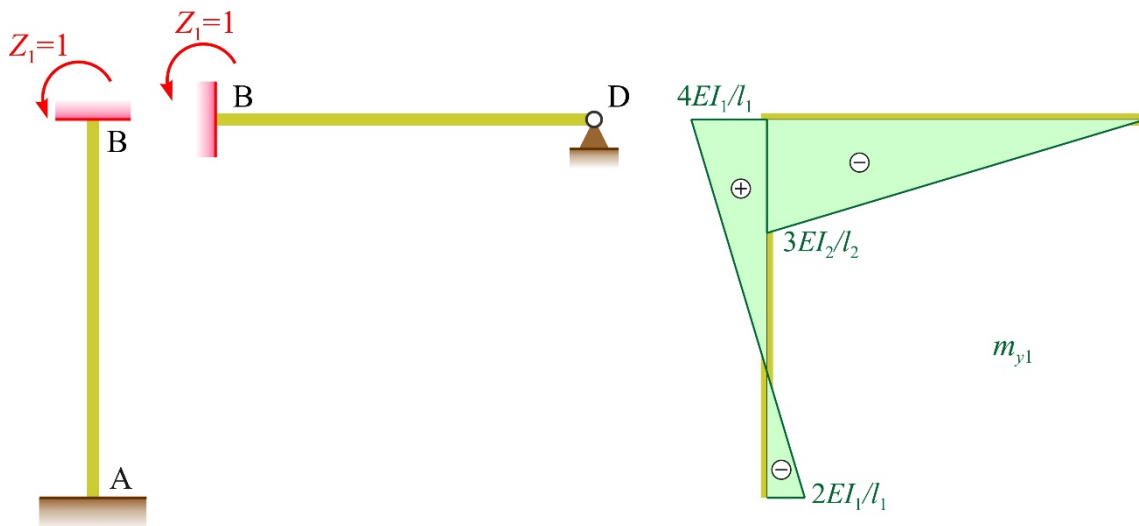
Osnovna jednačba metode pomaka glasi prema (6.2):

$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0.$$



Slika 6.13. *Primjer 6.2.*

Prije izračunavanja koeficijenta k_{11} i slobodnog člana Q_{1F} potrebno je odrediti dijagrame momenata savijanja dijelova AB i BD zbog vanjskog opterećenja M_{yF} (slika 6.13.) te m_{y1} zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ (slika 6.14.).



Slika 6.14. *Primjer 6.2.*

Koeficijent krutosti k_{11} dobije se iz momentne jednadžbe ravnoteže promatranjem ravnoteže dijela nosača između dvaju bliskih presjeka postavljenih neposredno uz kruti čvor B (slika 6.15.a) kako slijedi:

$$\sum M_B = 0: \quad k_{11} - \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} - \frac{3 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} + \frac{3 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} + \frac{3 \cdot E \cdot (2 \cdot I)}{2 \cdot l} = \frac{5 \cdot E \cdot I}{l}.$$

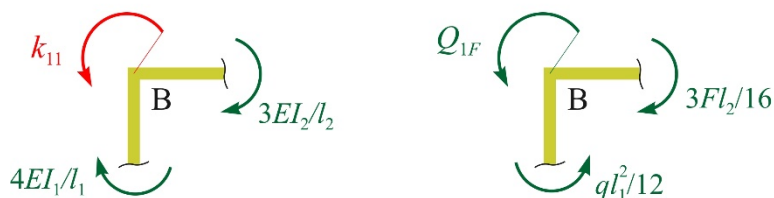
Na isti je način određen slobodni član (slika 6.15.b):

$$\sum M_B = 0: Q_{1F} + \frac{q \cdot l_1^2}{12} - \frac{3 \cdot F \cdot l_2}{16} = 0,$$

$$Q_{1F} = -\frac{q \cdot l_1^2}{12} + \frac{3 \cdot F \cdot l_2}{16} = -\frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12} + \frac{3 \cdot 3 \cdot q \cdot l \cdot 2l}{16} = \frac{19}{24} \cdot q \cdot l^2.$$

a)

b)



Slika 6.15. Primjer 6.2.

Iz osnovne jednačbe metode pomaka dobije se sada kutni zakret:

$$Z_1 = -\frac{Q_{1F}}{k_{11}} = -\frac{\frac{19}{24} \cdot q \cdot l^2}{\frac{5 \cdot E \cdot I}{l}} = -\frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}.$$

Konačne vrijednosti momenta savijanja u karakterističnim točkama nosača računaju se prema izrazu (6.3):

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + M_{yF,T}.$$

Sada je:

$$M_{y,A} = -\frac{2 \cdot E \cdot I_1}{l_1} \cdot \left(-\frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_1^2}{12},$$

$$M_{y,A} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12} = -\frac{7}{40} \cdot q \cdot l^2 = -0,175 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{AB} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} \cdot \left(-\frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_1^2}{12},$$

$$M_{y,B}^{AB} = -\frac{4 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12} = -\frac{13}{20} \cdot q \cdot l^2 = -0,65 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{BD} = -\frac{3 \cdot E \cdot I_2}{l_2} \cdot \left(-\frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{3 \cdot F \cdot l_2}{16},$$

$$M_{y,B}^{BD} = \frac{3 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{3 \cdot 3 \cdot q \cdot l \cdot 2 \cdot l}{16} = -\frac{13}{20} \cdot q \cdot l^2 = -0,65 \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,C} = -\frac{3 \cdot E \cdot I_2}{2 \cdot l_2} \cdot \left(-\frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) + \frac{5 \cdot F \cdot l_2}{32},$$

$$M_{y,C} = \frac{3 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} + \frac{5 \cdot 3 \cdot q \cdot l \cdot 2l}{32} = \frac{47}{40} \cdot q \cdot l^2 = 1,175 \cdot q \cdot l^2,$$

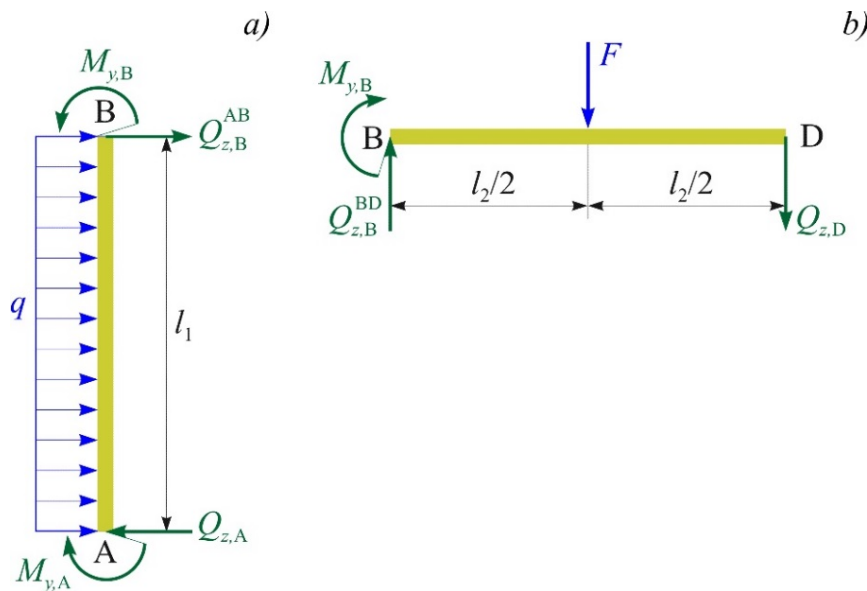
$$M_{y,D} = 0 \cdot \left(-\frac{19}{120} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) + 0 = 0.$$

Poprečne sile mogu se izračunati iz dobivenih vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim točkama razmatrajući ravnotežu odsječenih dijelova nosača prema slici 6.16.

Za dio AB (slika 6.16.a) uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum M_B = 0: \quad -M_{y,A} - Q_{z,A} \cdot l_1 + q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + M_{y,B} = 0;$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_{z,A} + q \cdot l_1 + Q_{z,B}^{AB} = 0.$$



Slika 6.16. *Primjer 6.2.*

Iz gornjih jednadžaba dobije se:

$$Q_{z,A} = \frac{M_{y,B} - M_{y,A}}{l_1} + \frac{q \cdot l_1}{2} = \frac{-0,65 \cdot q \cdot l^2 - (-0,125 \cdot q \cdot l^2)}{2l} + \frac{q \cdot 2l}{2} = 0,763 \cdot q \cdot l,$$

$$Q_{z,B}^{AB} = Q_{z,A} - q \cdot l_1 = 0,763 \cdot q \cdot l - q \cdot 2 \cdot l = -1,238 \cdot q \cdot l.$$

Budući da su predznaci gornjih poprečnih sila različiti, negdje između A i B poprečna sila jednaka je nuli i na tom je mjestu lokalni ekstrem funkcije momenta savijanja.

U proizvoljnom presjeku između A i B izrazi za poprečnu silu i moment savijanja glase:

$$Q_z = Q_{z,A} - q \cdot x = 0,763 \cdot q \cdot l - q \cdot x,$$

$$M_y = M_{y,A} + Q_{z,A} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -0,125 \cdot q \cdot l^2 + 0,763 \cdot q \cdot l \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2.$$

Poprečna sila jednaka je nuli u presjeku udaljenom od presjeka A za

$$Q_z = Q_{z,A} - q \cdot x = 0, \quad x = \frac{Q_{z,A}}{q} = \frac{0,763 \cdot q \cdot l}{q} = 0,763 \cdot l.$$

Vrijednost lokalnog ekstrema momenta savijanja iznosi:

$$M_y = -0,125 \cdot q \cdot l^2 + 0,763 \cdot q \cdot l \cdot 0,763 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (0,763 \cdot l)^2 = 0,116 \cdot q \cdot l^2.$$

Za dio BD (slika 6.16.b) uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum M_D = 0: \quad -Q_{z,B}^{BD} \cdot l_2 - M_{y,B}^{BD} + F \cdot \frac{l_2}{2} = 0;$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_{z,B}^{BD} + F + Q_{z,D} = 0.$$

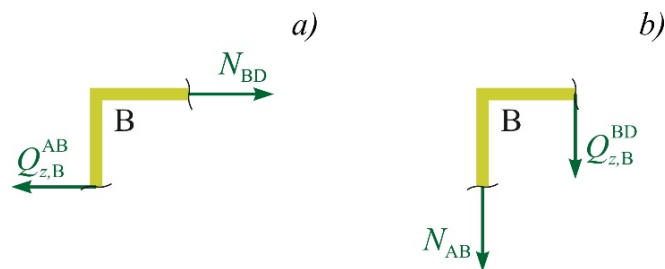
Rješavanjem gornjih jednadžaba dobije se:

$$Q_{z,B}^{BD} = \frac{-M_{y,B}^{BD}}{l_2} + \frac{F}{2} = \frac{-(-0,65 \cdot q \cdot l^2)}{2 \cdot l} + \frac{3 \cdot q \cdot l}{2} = 1,825 \cdot q \cdot l,$$

$$Q_{z,D} = Q_{z,B}^{BD} - F = 1,825 \cdot q \cdot l - 3 \cdot q \cdot l = -1,175 \cdot q \cdot l.$$

Uzdužne sile mogu se izračunati iz dobivenih vrijednosti poprečnih sila iz uvjeta ravnoteže postavljenih za kruti čvor B koji je iz zadanog nosača izrezan s dva bliska presjeka prema slici 6.17.

U presjecima na slici 6.17.a prikazane su samo pozitivne unutarnje sile potrebne za izračunavanje uzdužne sile N_{BD} , dok su na slici 6.17.b prikazane samo pozitivne unutarnje sile potrebne za izračunavanje uzdužne sile N_{AB} .



Slika 6.17. *Primjer 6.2.*

Uvjeti ravnoteže postavljeni su u odnosu na uzdužne osi x_1 i x_2 lokalnih koordinatnih sustava i glase:

$$\sum F_x = 0: \quad N_{BD} - Q_{z,B}^{AB} = 0;$$

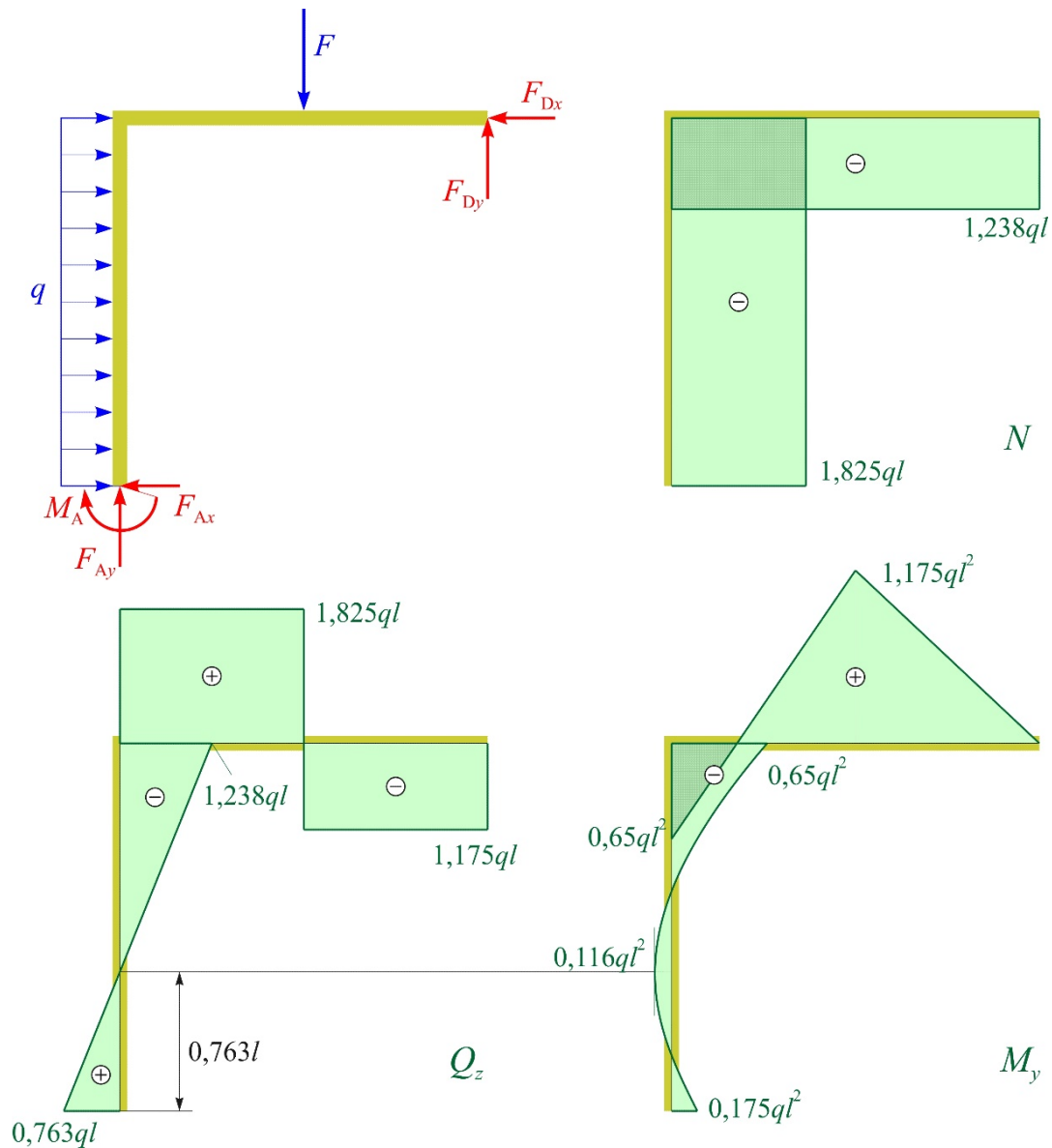
$$\sum F_x = 0: \quad N_{AB} + Q_{z,B}^{BD} = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednačzaba dobije se:

$$N_{BD} = Q_{z,B}^{AB} = -1,238 \cdot q \cdot l ;$$

$$N_{AB} = -Q_{z,B}^{BD} = -1,825 \cdot q \cdot l .$$

Prema dobivenim vrijednostima unutarnjih sila u karakterističnim točkama crtaju se dijagrami unutarnjih sila koji su prikazani na slici 6.18.

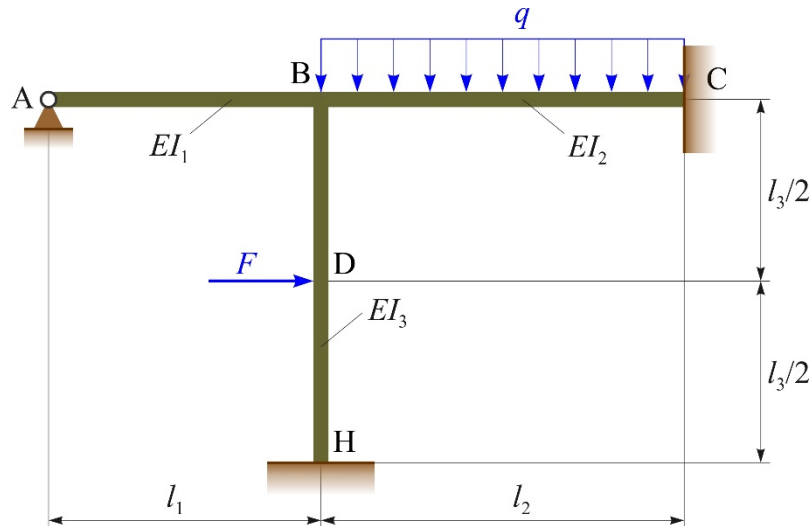


Slika 6.18. *Primjer 6.2.*

Primjer 6.3.

Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici 6.19. Primjenom metode pomaka treba odrediti dijagrame poprečnih sila i momenta savijanja.

Zadano je: q, l, E, I_y , te $F = 3 \cdot q \cdot l, l_1 = 2 \cdot l, l_2 = 3 \cdot l, l_3 = 4 \cdot l, I_1 = 2 \cdot I_y, I_2 = 2,5 \cdot I_y, I_3 = 1,8 \cdot I_y, q = 10 \text{ kN/m}, l = 1 \text{ m}, E = 210 \text{ GPa}$.



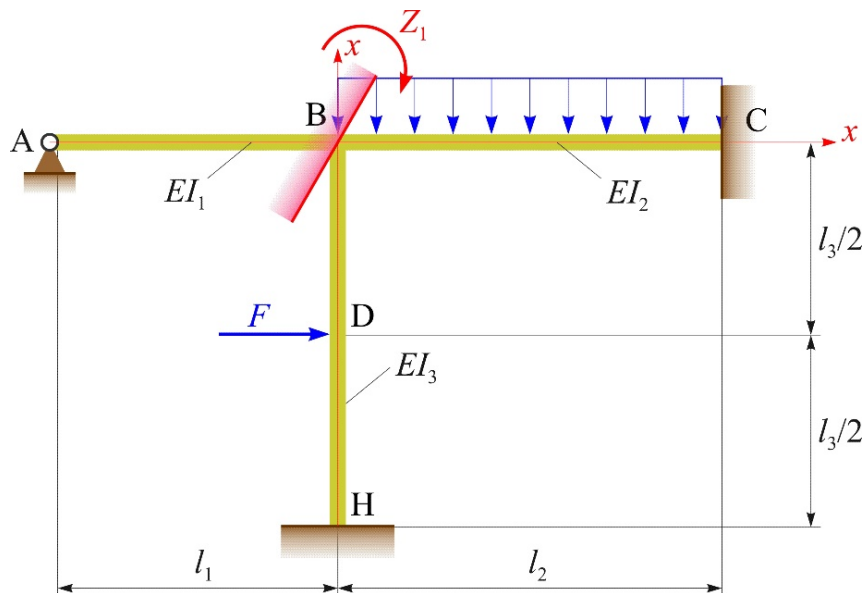
Slika 6.19. *Primjer 6.3.*

Rješenje:

Zadatak je jedanput kinematički neodređen s obzirom na to da postoji kutni zakret slobodnog krutog čvora B pa je:

$$N_{\varphi} = 1; \quad N_{\Delta} = 0; \quad N = N_{\varphi} + N_{\Delta} = 1 + 0 = 1.$$

Osnovna konstrukcija (ekvivalentna kinematički određena) dobije se iz zadane umetanjem dodatnog uklještenja u presjeku B, koje sprječava kutni pomak krutog čvora B.



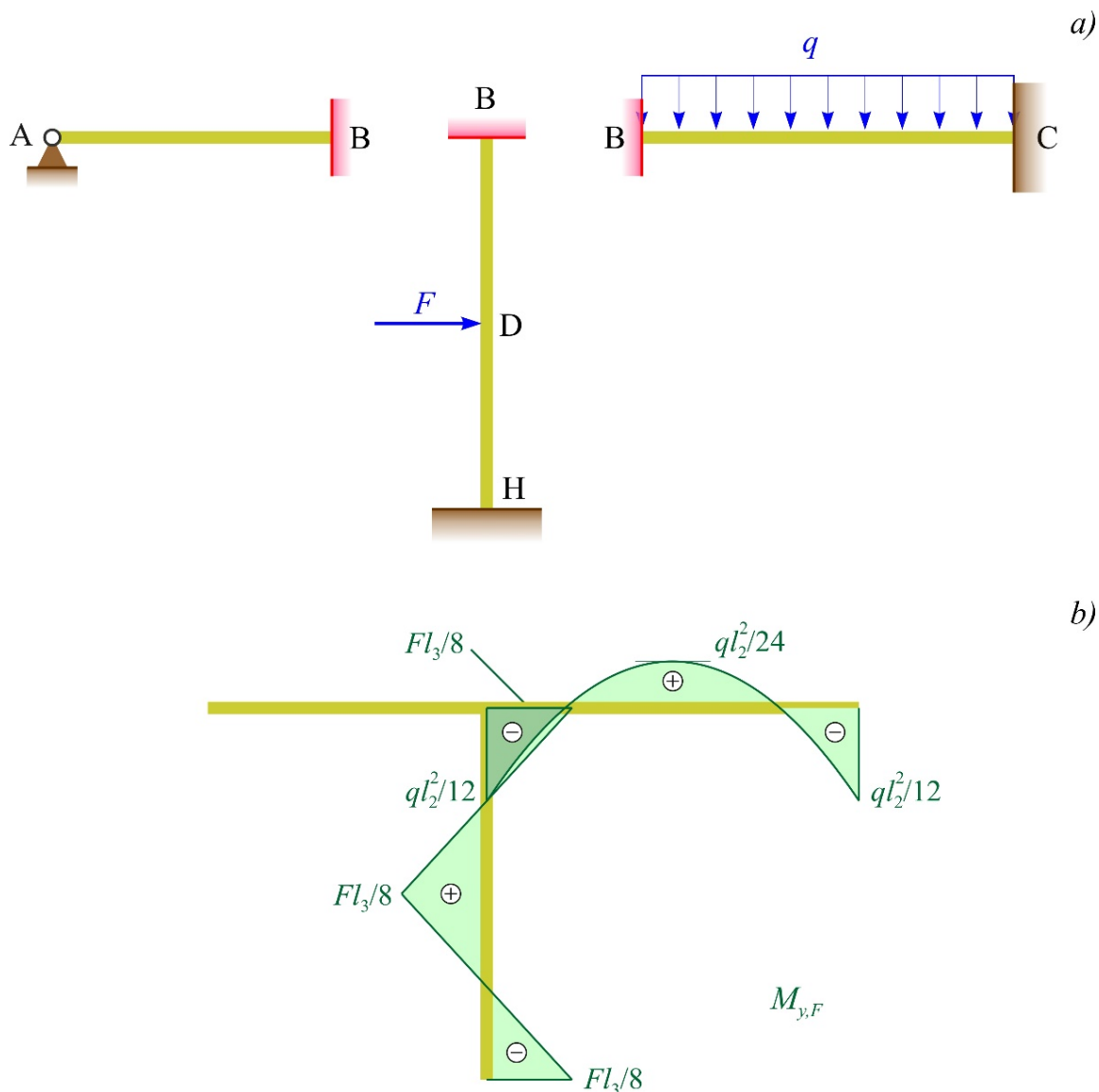
Slika 6.20. *Primjer 6.3.*

Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestu prekobrojne veze (uklještenje u B) doda odgovarajući kutni pomak Z_1 (slika 6.20.). Time je osnovna konstrukcija podijeljena na tri odvojena nosača: nosač AB koji je u A zglobno oslonjen, a u B uklješten; nosače BC i HB koji su uklještjeni na oba kraja (slika 6.21.a).

Osnovna jednačba metode pomaka glasi prema (6.2):

$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0.$$

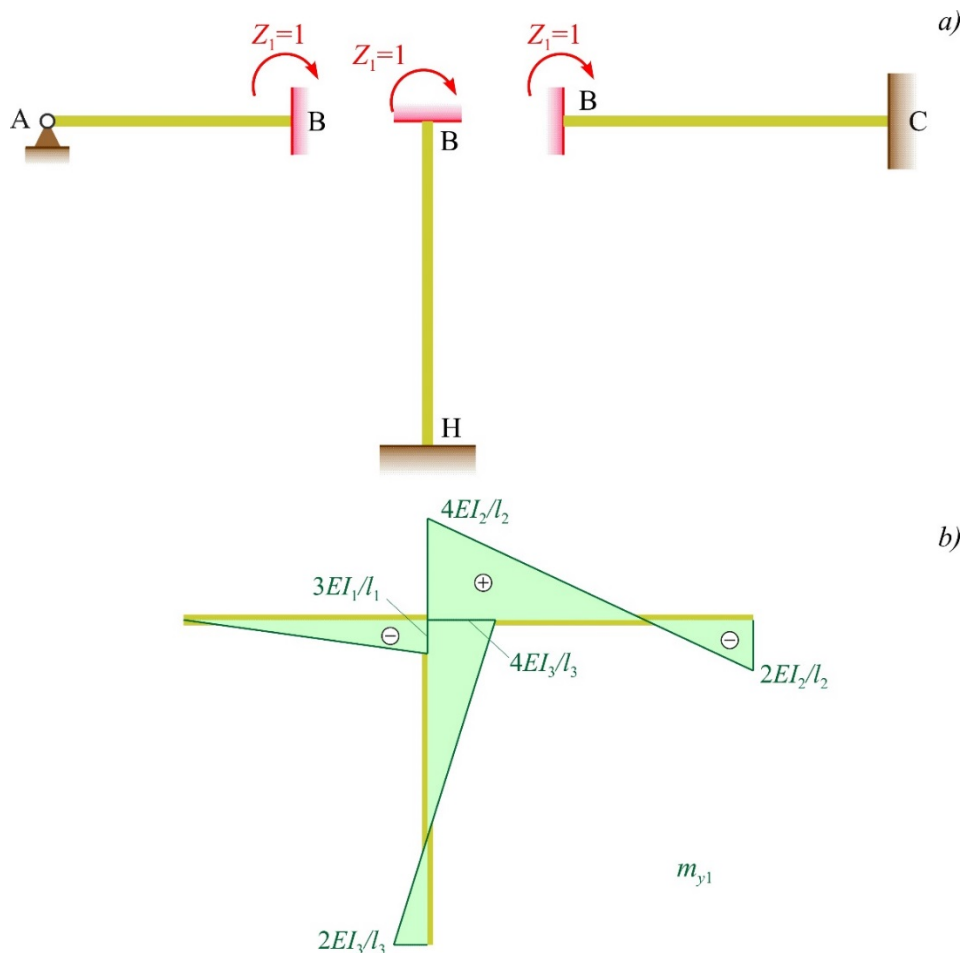
U svrhu izračunavanja koeficijenta k_{11} i slobodnog člana Q_{1F} potrebno je odrediti dijagrame momenata savijanja dijelova BC i HB zbog vanjskog opterećenja M_{yF} (slika 6.21.b) te dijagrame momenta savijanja m_{y1} za sva tri dijela zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ (slika 6.22.).



Slika 6.21. *Primjer 6.3.*

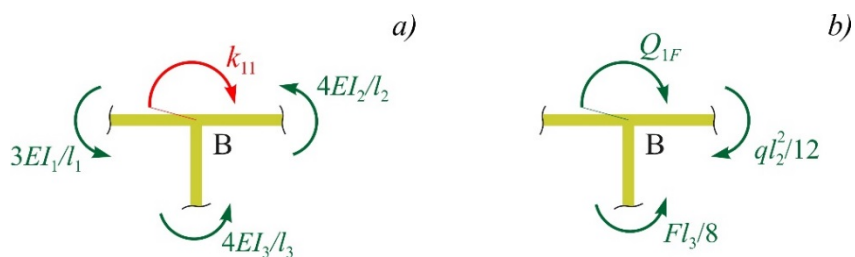
Dijagrami momenata savijanja dijelova BC i HB zbog djelovanja vanjskog opterećenja M_{yF} određeni su prema tablici 6.1., koja se nalazi na kraju ovog poglavlja.

Prema istoj tablici određeni su za sva tri dijela dijagrami momenta savijanja m_{y1} nastali od jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$.



Slika 6.22. *Primjer 6.3.*

Koeficijent krutosti k_{11} dobije se iz momentne jednadžbe ravnoteže promatranjem ravnoteže dijela čvora B izrežanog iz zadanog okvirnog nosača s tri bliska presjeka (slika 6.23.a) kako slijedi:



Slika 6.23. *Primjer 6.3.*

$$\sum M_B = 0: \quad -k_{11} + \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{l_1} + \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} + \frac{4 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{l_1} + \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} + \frac{4 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = \frac{3 \cdot E \cdot 2 \cdot I_y}{2 \cdot l} + \frac{4 \cdot E \cdot 2,5 \cdot I_y}{3 \cdot l} + \frac{4 \cdot E \cdot 1,8 \cdot I_y}{4 \cdot l}.$$

$$k_{11} = \frac{122}{15} \cdot \frac{E \cdot I_y}{l}.$$

Na isti je način određen slobodni član (slika 6.23.b):

$$\sum M_B = 0: -Q_{1F} - \frac{q \cdot l_2^2}{12} + \frac{F \cdot l_3}{8} = 0,$$

$$Q_{1F} = -\frac{q \cdot l_2^2}{12} + \frac{F \cdot l_3}{8} = -\frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12} + \frac{(3 \cdot q \cdot l) \cdot (4 \cdot l)}{8} = \frac{3}{4} \cdot q \cdot l^2.$$

Iz osnovne jednačbe metode pomaka (6.2) dobije se sada kutni zakret:

$$Z_1 = -\frac{Q_{1F}}{k_{11}} = -\frac{\frac{3}{4} \cdot q \cdot l^2}{\frac{122}{15} \cdot \frac{E \cdot I_y}{l}} = -\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y}.$$

Konačne vrijednosti momenta savijanja u karakterističnim točkama nosača računaju se prema izrazu (6.3):

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + M_{yF,T}.$$

Sada je:

$$M_{y,A} = 0,$$

$$M_{y,B}^{AB} = -\frac{3 \cdot E \cdot 2 \cdot I_y}{2 \cdot l} \cdot \left(-\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} \right) = 0,277 \cdot q \cdot l^2 = 2,77 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{y,B}^{BC} = \frac{4 \cdot E \cdot 2,5 \cdot I_y}{3 \cdot l} \cdot \left(-\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} \right) - \frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12} = -\frac{516}{488} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{BC} = -1,057 \cdot q \cdot l^2 = -10,57 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{y,C} = -\frac{2 \cdot E \cdot 2,5 \cdot I_y}{3 \cdot l} \cdot \left(-\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} \right) - \frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12} = -\frac{291}{488} \cdot q \cdot l^2$$

$$M_{y,C} = -0,596 \cdot q \cdot l^2 = -5,96 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{y,H} = \frac{2 \cdot E \cdot 1,8 \cdot I_y}{4 \cdot l} \cdot \left(-\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} \right) - \frac{(3 \cdot q \cdot l) \cdot (4 \cdot l)}{8} = -\frac{1545}{976} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,H} = -1,583 \cdot q \cdot l^2 = -15,83 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

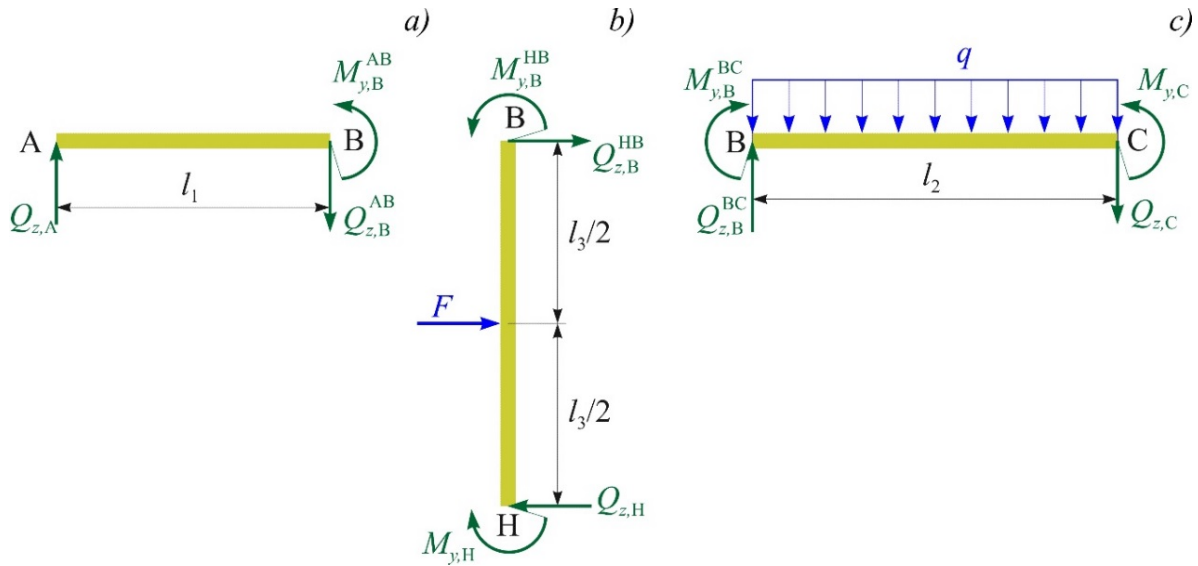
$$M_{y,D} = -\frac{E \cdot 1,8 \cdot I_y}{4 \cdot l} \cdot \left(-\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} \right) + \frac{(3 \cdot q \cdot l) \cdot (4 \cdot l)}{8} = \frac{3009}{1952} \cdot q \cdot l^2$$

$$M_{y,D} = 1,541 \cdot q \cdot l^2 = 15,41 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{y,B}^{\text{HB}} = -\frac{4 \cdot E \cdot 1,8 \cdot I_y}{4 \cdot l} \cdot \left(-\frac{45}{488} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I_y} \right) - \frac{(3 \cdot q \cdot l) \cdot (4 \cdot l)}{8} = -\frac{651}{488} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B}^{\text{HB}} = -1,334 \cdot q \cdot l^2 = -13,34 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Poprečne sile mogu se dobiti razmatranjem ravnoteže odsječenih dijelova nosača nakon što su određeni momenti savijanja (slika 6.24.).



Slika 6.24. Primjer 6.3.

Za dio AB je (slika 6.24.a):

$$\sum M_B = 0: -Q_{z,A} \cdot l_1 + M_{y,B}^{\text{AB}} = 0,$$

$$Q_{z,A} = \frac{M_{y,B}^{\text{AB}}}{l_1} = \frac{0,277 \cdot q \cdot l^2}{2l} = 0,138 \cdot q \cdot l = 1,38 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,A} + Q_{z,B}^{\text{AB}} = 0,$$

$$Q_{z,B}^{\text{AB}} = Q_{z,A} = 0,138 \cdot q \cdot l = 1,38 \text{ kN}.$$

Za dio BC poprečne sile određene su kako slijedi (slika 6.24.c):

$$\sum M_C = 0: -Q_{z,B}^{\text{BC}} \cdot l_2 - M_{y,B}^{\text{BC}} + q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + M_{y,C} = 0,$$

$$Q_{z,B}^{\text{BC}} = \frac{M_{y,C} - M_{y,B}^{\text{BC}}}{l_2} + \frac{q \cdot l_2}{2};$$

$$Q_{z,B}^{\text{BC}} = \frac{-0,596 \cdot q \cdot l^2 - (-1,057 \cdot q \cdot l^2)}{3l} + \frac{q \cdot (3 \cdot l)}{2} = 1,654 \cdot q \cdot l = 16,54 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,B}^{BC} + q \cdot l_2 + Q_{z,C} = 0,$$

$$Q_{z,C} = Q_{z,B}^{BC} - q \cdot l_2 = 1,654 \cdot q \cdot l - q \cdot (3 \cdot l)$$

$$Q_{z,C} = -1,346 \cdot q \cdot l = -13,46 \text{ kN}.$$

Budući da je ovaj dio nosača opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem izraz za poprečnu silu je linearna funkcija, a izraz za moment savijanja kvadratna funkcija.

Lokalni ekstrem momenta savijanja jest na mjestu gdje je poprečna sila jednaka nuli i može se dobiti kako slijedi:

$$Q_z(x) = Q_{z,B}^{BC} - q \cdot x = 1,654 \cdot q \cdot l - q \cdot x = 0,$$

$$x = 1,654 \cdot l,$$

$$M_y(x) = M_{y,B}^{BC} + Q_{z,B}^{BC} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -1,057 \cdot q \cdot l^2 + 1,654 \cdot q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$M_y(1,654 \cdot l) = -1,057 \cdot q \cdot l^2 + 1,654 \cdot q \cdot l \cdot 1,654 \cdot l - q \cdot \frac{(1,654 \cdot l)^2}{2},$$

$$M_y(1,654 \cdot l) = 0,311 \cdot q \cdot l^2.$$

$$M_y(1,654 \cdot l) = 3,11 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Za dio HB poprečne sile dobiju se na sljedeći način (slika 6.24.b):

$$\sum M_B = 0: -Q_{z,H} \cdot l_3 - M_{y,H} + F \cdot \frac{l_3}{2} + M_{y,B}^{HB} = 0,$$

$$Q_{z,H} = \frac{M_{y,B}^{HB} - M_{y,H}}{l_3} + \frac{F}{2}$$

$$Q_{z,H} = \frac{M_{y,B}^{HB} - M_{y,H}}{l_3} + \frac{F}{2} = \frac{-13,34 - (-15,83)}{4} + \frac{30}{2};$$

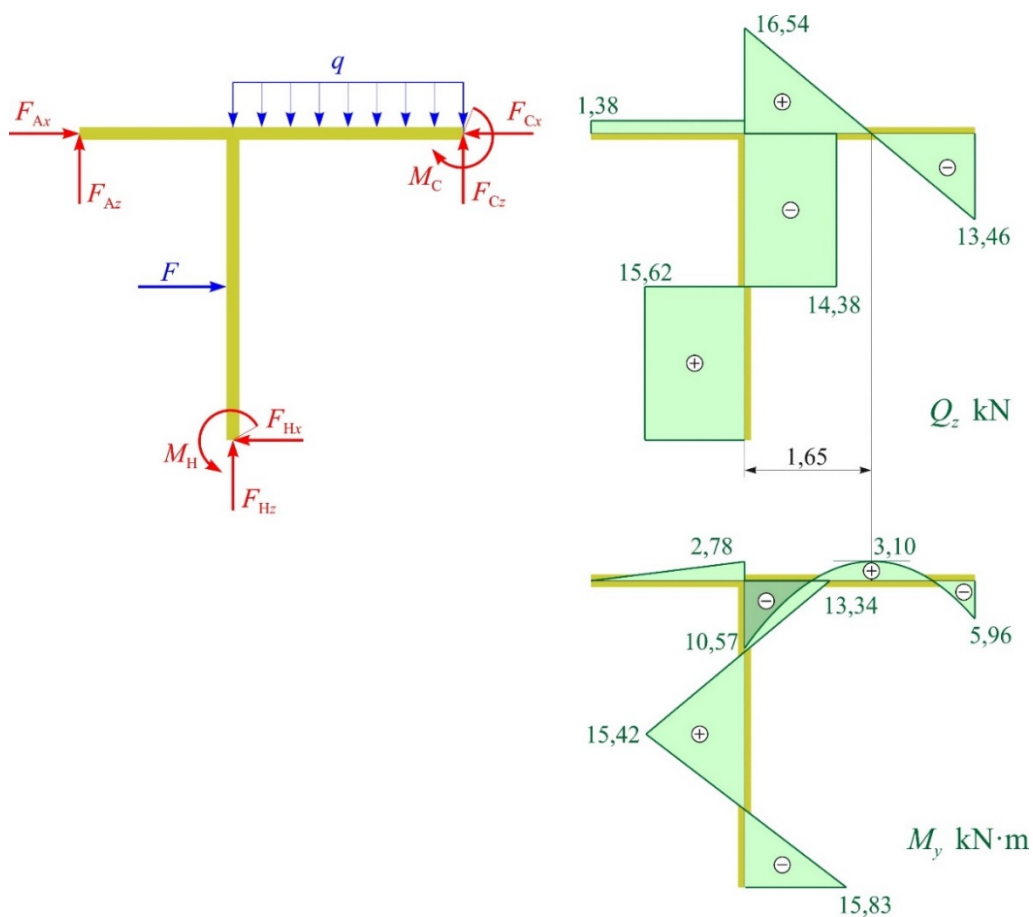
$$Q_{z,H} = 15,62 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,H} + F + Q_{z,B}^{HB} = 0,$$

$$Q_{z,B}^{HB} = Q_{z,H} - F = 15,62 - 30.$$

$$Q_{z,B}^{HB} = -14,38 \text{ kN}.$$

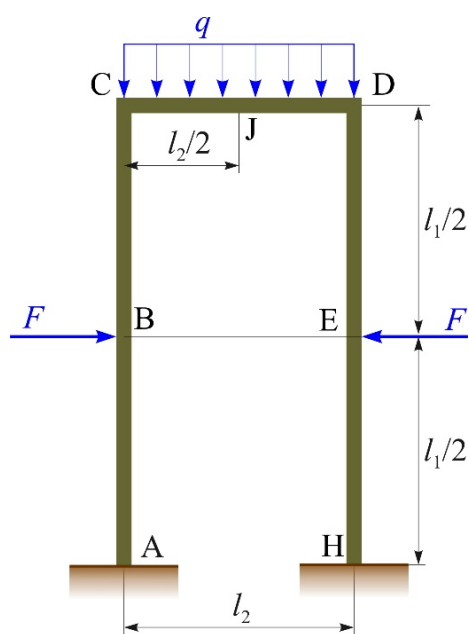
Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 6.25.



Slika 6.25. *Primjer 6.3.*

Primjer 6.4.

Za simetrični okvirni nosač simetrično opterećen prema slici 6.26. primjenom metode pomaka treba odrediti dijagrame unutarnjih sila ako je zadano: q , l , E , $I_y = I$ te $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = l$, $F = 2 \cdot q \cdot l$.



Slika 6.26. *Primjer 6.4.*

Rješenje:

Zadatak je tri puta kinematički neodređen s obzirom na to da postoje kutni zakreti dvaju slobodnih kutnih čvorova C i D te linearni horizontalni pomak čvora D (čvor C ako se zanemari rastezanje dijela CD ima isti linearni pomak kao i čvor D) pa je prema (6.1):

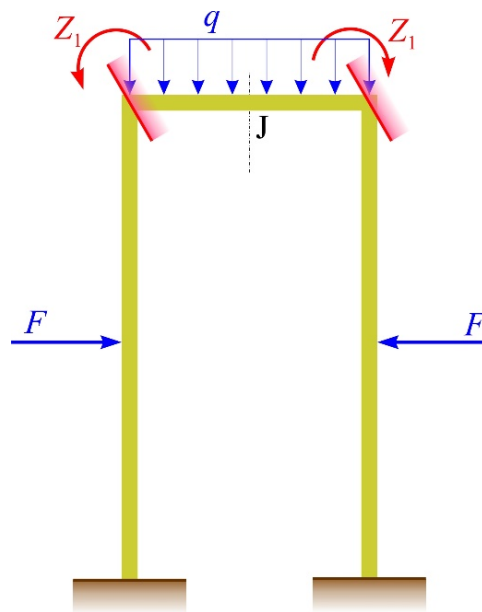
$$N = N_{\varphi} + N_{\Delta} = 2 + 1 = 3.$$

Budući da se radi o simetričnoj konstrukciji, koja je uz to simetrično opterećena, može se zaključiti da je kutni zakret krutog čvora D jednak po iznosu kutnom zakretu krutog čvora C i suprotno usmjeren (slika 6.27) te da linearni pomaci čvorova C i D moraju biti jednaki nuli.

Dakle, zbog simetrije postoji samo jedna nepoznanica Z_1 , tj. kutni zakret čvora C ili D.

Osnovna konstrukcija (ekvivalentna kinematički određena) dobije se iz zadane umetanjem dodatnih uklještenja u čvorovima C i D, koja sprječavaju kutne pomake krutih čvorova C i D.

Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestima umetnutih uklještenja u C i D dodaju odgovarajući kutni pomaci Z_1 , jednaki po iznosu i suprotno usmjereni. Time je osnovna konstrukcija podijeljena na tri odvojena nosača koja su uklještena na oba kraja (slika 6.27).

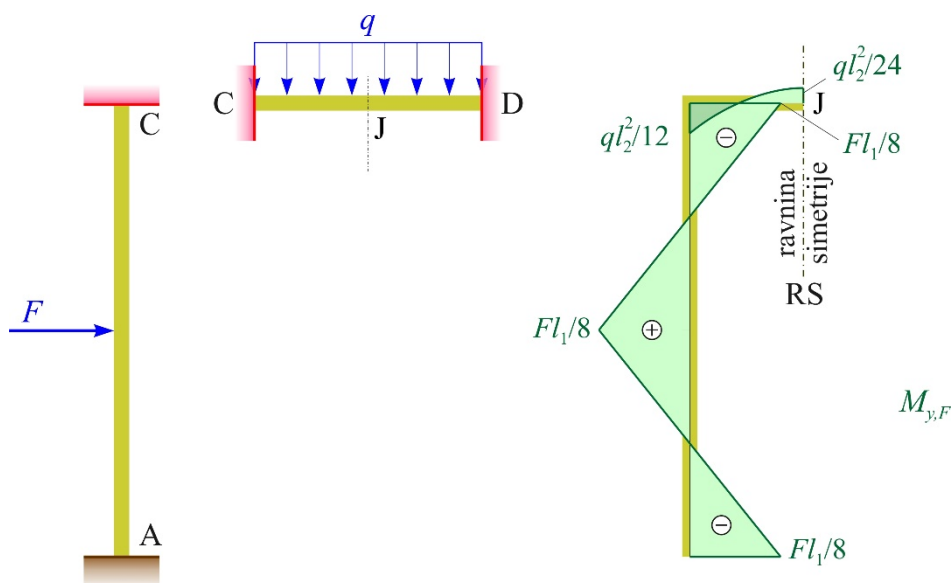


Slika 6.27. Primjer 6.4.

Kanonska jednačba metode pomaka sada glasi:

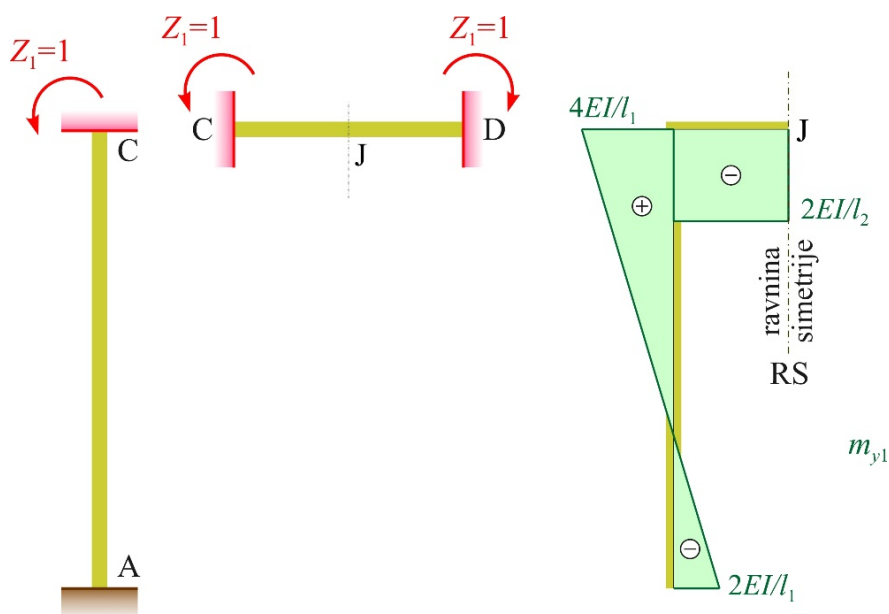
$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0.$$

Radi izračunavanja koeficijenta k_{11} i slobodnog člana Q_{1F} potrebno je odrediti dijagrame momenata savijanja zbog djelovanja vanjskog opterećenja M_{yF} (slika 6.28.) i dijagrame momenta savijanja m_{y1} zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ za pola konstrukcije (slika 6.29.).



Slika 6.28. *Primjer 6.4.*

Dijagram momenta savijanja m_{y1} za horizontalni dio CD (slika 6.29.) dobiven je superpozicijom: od kutnog zakreta $Z_1 = 1$ krutog čvora C i kutnog zakreta $Z_1 = 1$ krutog čvora D prema tablici dijagrama 6.1. na kraju ovog poglavlja.

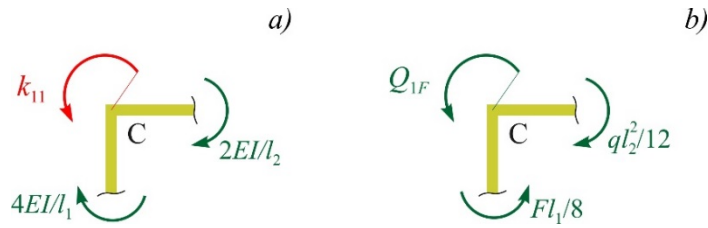


Slika 6.29. *Primjer 6.4.*

Koeficijent krutosti k_{11} dobije se iz momentne jednačbe ravnoteže promatranjem ravnoteže čvora C izrezanog iz zadanog okvirnog nosača s dva bliska presjeka (slika 6.30.a) kako slijedi:

$$\sum M_C = 0: k_{11} - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_1} - \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_1} + \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} + \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l}.$$



Slika 6.30. *Primjer 6.4.*

Na isti je način određen slobodni član (slika 6.30.b):

$$\sum M_C = 0: Q_{1F} + \frac{F \cdot l_1}{8} - \frac{q \cdot l_2^2}{12} = 0 \vee,$$

$$Q_{1F} = -\frac{F \cdot l_1}{8} + \frac{q \cdot l_2^2}{12} = -\frac{(2 \cdot q \cdot l) \cdot (2 \cdot l)}{8} + \frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{5}{12} \cdot q \cdot l^2.$$

Iz osnovne jednačbe metode pomaka (6.2) dobije se sada kutni zakret:

$$Z_1 = -\frac{Q_{1F}}{k_{11}} = -\frac{-\frac{5}{12} \cdot q \cdot l^2}{4 \cdot \frac{E \cdot I}{l}} = \frac{5}{48} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}.$$

Momenti savijanja u karakterističnim točkama nosača računaju se prema izrazu (6.3):

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + M_{yF,T}.$$

Dalje je:

$$M_{y,A} = -\frac{2 \cdot E \cdot I}{l_1} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{F \cdot l_1}{8} = -\frac{2}{2l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{48} - \frac{(2 \cdot q \cdot l) \cdot (2 \cdot l)}{8},$$

$$M_{y,A} = -\frac{29}{48} \cdot q \cdot l^2 = -0,604 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,B} = \frac{E \cdot I}{l_1} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} + \frac{F \cdot l_1}{8} = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{48} + \frac{(2 \cdot q \cdot l) \cdot (2 \cdot l)}{8} = \frac{53}{96} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,B} = 0,552 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,C}^{AC} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_1} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{F \cdot l_1}{8} = \frac{4}{2l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{48} - \frac{(2 \cdot q \cdot l) \cdot (2 \cdot l)}{8} = -\frac{14}{48} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,C}^{AC} = -0,292 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,C}^{CD} = -\frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{q \cdot l_2^2}{12} = -\frac{2}{l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{48} - \frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{14}{48} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,C}^{CD} = -0,292 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,J} = -\frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} + \frac{q \cdot l_2^2}{24} = -\frac{2}{l} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^3}{48} + \frac{q \cdot l^2}{24} = -\frac{1}{6} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,J} = -0,167 \cdot q \cdot l^2.$$

Razmatranjem ravnoteže odsječenih dijelova nosača nakon što su određeni momenti savijanja mogu se odrediti poprečne sile (slika 6.31.).

Za dio AC je (slika 6.31.a):

$$\sum M_C = 0: -Q_{z,A} \cdot l_1 - M_{y,A} + F \cdot \frac{l_1}{2} + M_{y,C}^{AC} = 0,$$

$$Q_{z,A} = \frac{M_{y,C}^{AC} - M_{y,A}}{l_1} + \frac{F}{2} = \frac{-0,292 \cdot q \cdot l^2 - (-0,604 \cdot q \cdot l^2)}{2l} + \frac{2 \cdot q \cdot l}{2} = 1,156 \cdot q \cdot l;$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,A} + F + Q_{z,C}^{AC} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{AC} = Q_{z,A} - F = 1,156 \cdot q \cdot l - 2 \cdot q \cdot l = -0,844 \cdot q \cdot l.$$

Za dio CD poprečne sile određene su kako slijedi (slika 6.31.b):

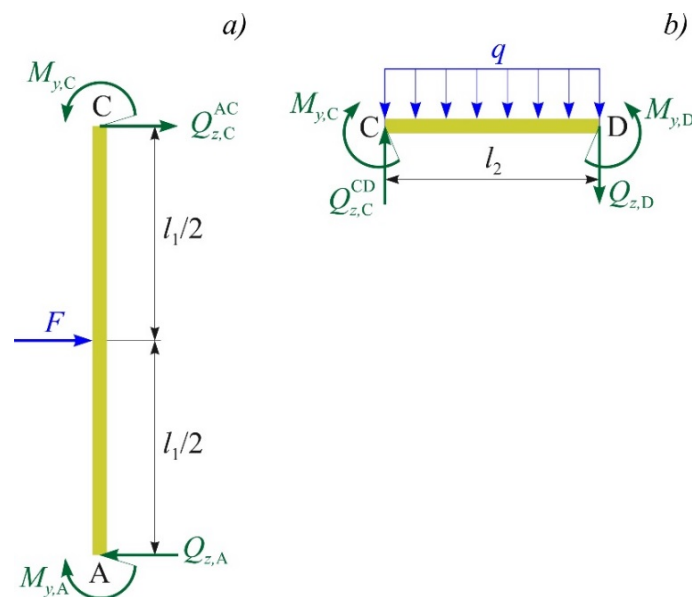
$$\sum M_D = 0: -Q_{z,C}^{CD} \cdot l_2 - M_{y,C}^{CD} + q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + M_{y,D} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{CD} = \frac{q \cdot l_2}{2} = \frac{q \cdot l}{2} = 0,5 \cdot q \cdot l;$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,C}^{CD} + q \cdot l_2 + Q_{z,D} = 0,$$

$$Q_{z,D} = Q_{z,C}^{CD} - q \cdot l_2 = 0,5 \cdot q \cdot l - q \cdot l = -0,5 \cdot q \cdot l,$$

$$Q_{z,J} = Q_{z,C}^{CD} - 0,5 \cdot q \cdot l_2 = 0,5 \cdot q \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot l = 0.$$



Slika 6.31. Primjer 6.4.

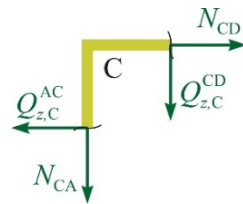
Uzdužne sile mogu se dobiti razmatranjem čvora C (slika 6.32.) iz jednažaba ravnoteže kako slijedi:

$$\sum F_x = 0: N_{CD} - Q_{z,C}^{AC} = 0,$$

$$N_{CD} = Q_{z,C}^{AC} = -0,844 \cdot q \cdot l;$$

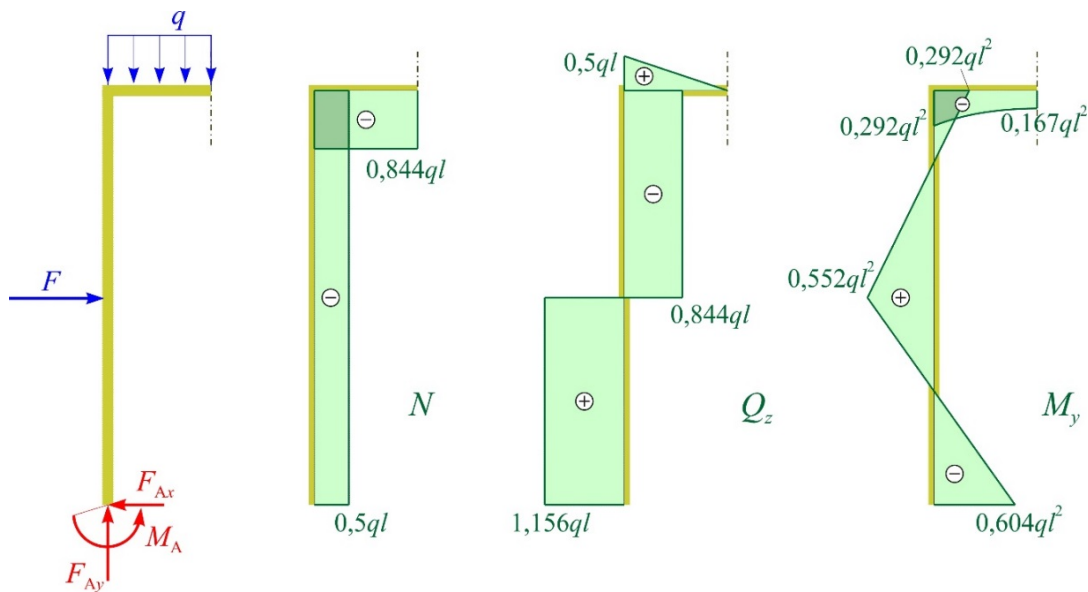
$$\sum F_z = 0: -N_{CA} - Q_{z,C}^{CD} = 0,$$

$$N_{CA} = -Q_{z,C}^{CD} = -0,5 \cdot q \cdot l.$$



Slika 6.32. *Primjer 6.4.*

Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 6.33.

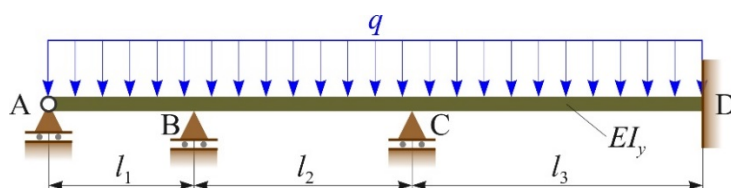


Slika 6.33. *Primjer 6.4.*

Primjer 6.5.

Za linijski nosač zadan i opterećen prema slici 6.34. potrebno je odrediti dijagrame poprečnih sila i momenta savijanja koristeći se metodom pomaka.

Zadano je: q , l , $I_y = I$, E , $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 3 \cdot l$, $l_3 = 4 \cdot l$.



Slika 6.34. *Primjer 6.5.*

Rješenje:

Zadatak je dva puta kinematički neodređen (mogućnost zakretanja slobodnih čvorova B i C).

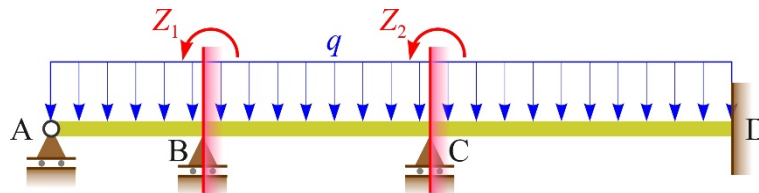
Osnovna konstrukcija (ekvivalentna kinematički određena) dobije se iz zadane umetanjem dodatnih uklještenja u čvorovima B i C, koji sprječavaju kutne zakrete istih čvorova.

Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestima prekobrojnih veza (uklještenja u B i C) dodaju odgovarajući kutni pomaci Z_1 i Z_2 . Time je osnovna konstrukcija svedena na tri odvojena nosača: nosač AB koji je u A zglobno vezan, a u B uklješten te nosače BC i CD koji su uklješteni na oba kraja (slika 6.35).

Osnovne jednačbe metode pomaka prema (6.4) glase:

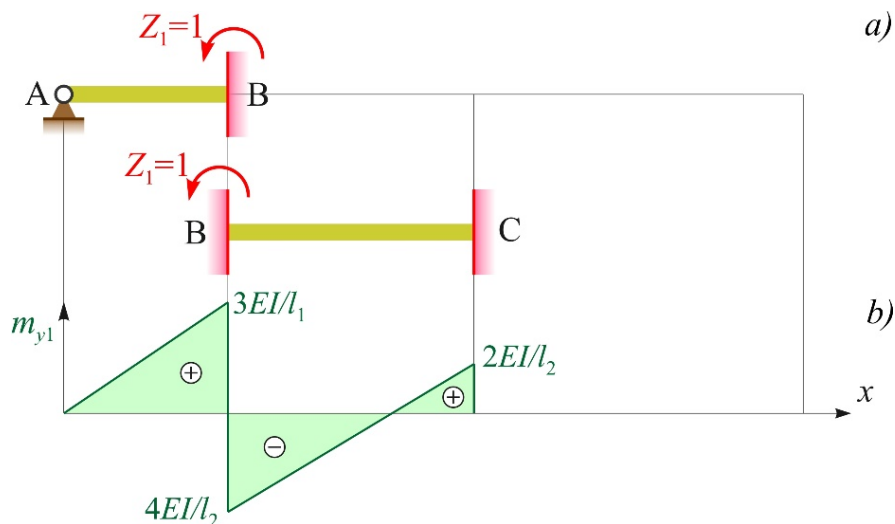
$$k_{11} \cdot Z_1 + k_{12} \cdot Z_2 + Q_{1F} = 0$$

$$k_{21} \cdot Z_1 + k_{22} \cdot Z_2 + Q_{2F} = 0.$$



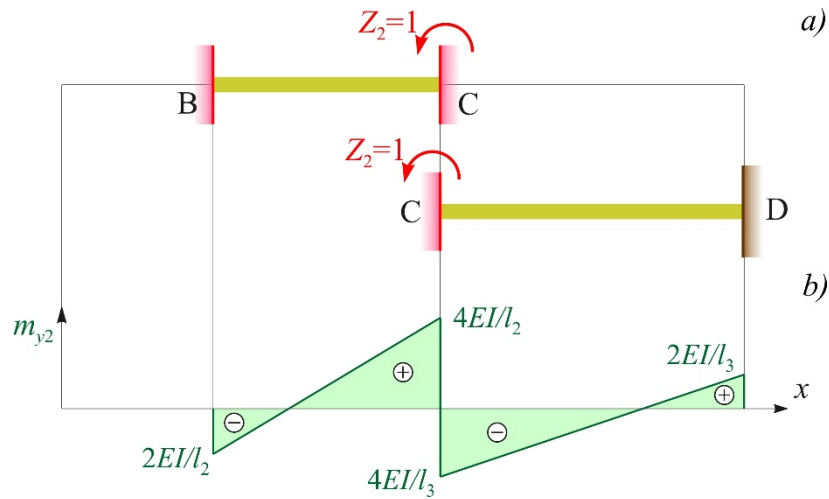
Slika 6.35. Primjer 6.5.

Dijagram momenta savijanja m_{y1} za dijelove nosača AB i BC zbog jediničnog kutnog zakreta Z_1 prikazan je na slici 6.36.b,



Slika 6.36. Primjer 6.5.

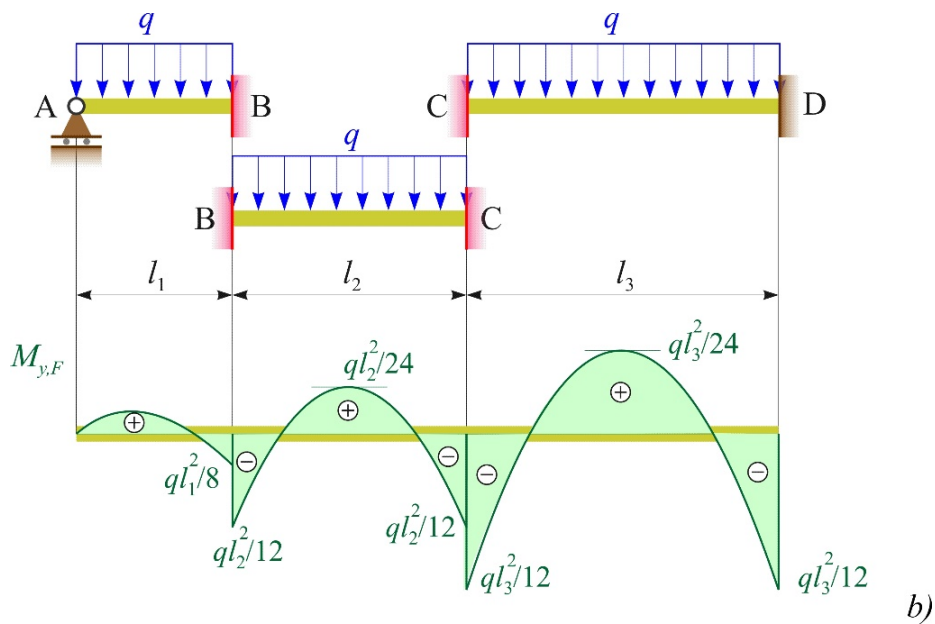
dok je dijagram momenta savijanja m_{y2} dijelova BC i CD zbog jediničnog kutnog zakreta Z_2 prikazan na slici 6.37.b.



Slika 6.37. *Primjer 6.5.*

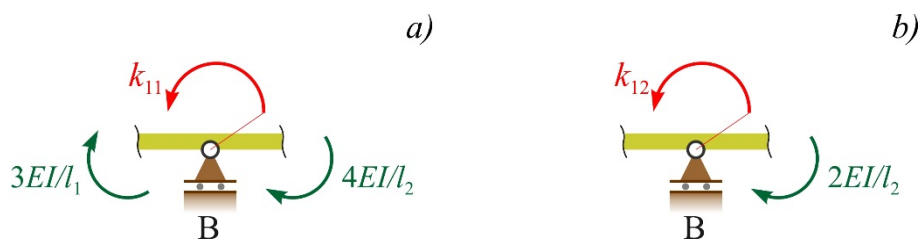
Dijagram momenta savijanja M_{yF} zbog djelovanja vanjskog opterećenja za cijeli nosač dan je na slici 6.38.

Svi navedeni dijagrami dobiveni su prema tablici 6.1.



Slika 6.38. *Primjer 6.5.*

Koeficijenti krutosti k_{11} i k_{12} mogu se dobiti promatranjem ravnoteže dijelova nosača između bliskih presjeka postavljenih lijevo i desno od krutog čvora B (slika 6.39.a i 6.39.b) kako slijedi:



Slika 6.39. *Primjer 6.5.*

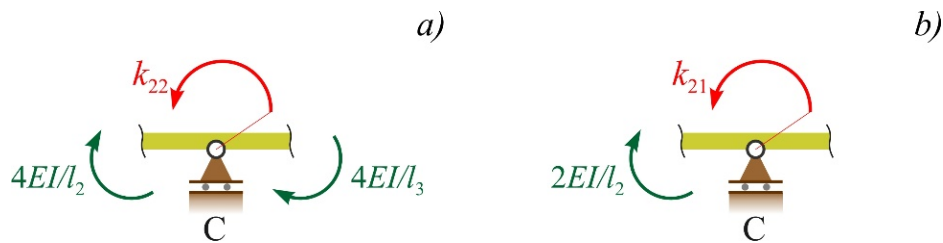
$$\sum M_B = 0: k_{11} - \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_1} - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_1} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l} = \frac{17 \cdot E \cdot I}{6 \cdot l};$$

$$\sum M_B = 0: k_{12} - \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} = 0,$$

$$k_{12} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l}.$$

Koeficijenti krutosti k_{22} i k_{21} na isti način mogu se dobiti promatranjem ravnoteže dijelova nosača između bliskih presjeka postavljenih lijevo i desno od krutog čvora C (slika 6.40.a i 6.40.b):



Slika 6.40. *Primjer 6.5.*

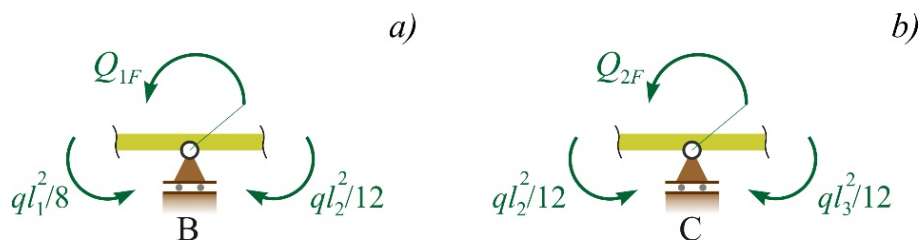
$$\sum M_C = 0: k_{22} - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_3} = 0,$$

$$k_{22} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_3} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l} = \frac{7 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l};$$

$$\sum M_C = 0: k_{21} - \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} = 0,$$

$$k_{21} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l}.$$

Slobodni članovi Q_{1F} i Q_{2F} u kanonskim jednadžbama metode pomaka dobiveni su prema slici 6.41.a i b kako slijedi:



Slika 6.41. *Primjer 6.5.*

$$\sum M_B = 0: Q_{1F} + \frac{q \cdot l_1^2}{8} - \frac{q \cdot l_2^2}{12} = 0,$$

$$Q_{1F} = -\frac{q \cdot l_1^2}{8} + \frac{q \cdot l_2^2}{12} = -\frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{8} + \frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12} = \frac{q \cdot l^2}{4};$$

$$\sum M_C = 0: Q_{2F} + \frac{q \cdot l_2^2}{12} - \frac{q \cdot l_3^2}{12} = 0,$$

$$Q_{2F} = -\frac{q \cdot l_2^2}{12} + \frac{q \cdot l_3^2}{12} = -\frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12} + \frac{q \cdot (4 \cdot l)^2}{12} = \frac{7 \cdot q \cdot l^2}{12}.$$

Kanonske jednačbe sada glase:

$$\frac{17 \cdot E \cdot I}{6 \cdot l} \cdot Z_1 + \frac{2 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l} \cdot Z_2 + \frac{q \cdot l^2}{4} = 0$$

$$\frac{2 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l} \cdot Z_1 + \frac{7 \cdot E \cdot I}{3 \cdot l} \cdot Z_2 + \frac{7 \cdot q \cdot l^2}{12} = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednačaba dobije se:

$$Z_1 = -\frac{7}{222} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}, \quad Z_2 = -\frac{107}{444} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}.$$

Konačne vrijednosti momenta savijanja u karakterističnim tačkama nosača računaju se prema izrazu (6.6):

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + m_{2y,T} \cdot Z_2 + M_{yF,T}.$$

Sada je:

$$M_{y,A} = 0 \cdot \left(-\frac{7}{222} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) + 0 = 0,$$

$$M_{y,B}^{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l_1} \cdot \left(-\frac{7}{222} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_1^2}{8} = \frac{3}{2 \cdot l} \cdot \left(-\frac{7 \cdot q \cdot l^3}{222} \right) - \frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{8},$$

$$M_{y,B}^{AB} = -\frac{81}{148} \cdot q \cdot l^2 = -0,547 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,B}^{BC} = -\frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \left(-\frac{7}{222} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \left(-\frac{107}{444} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_2^2}{12},$$

$$M_{y,B}^{BC} = \frac{4}{3 \cdot l} \cdot \frac{7 \cdot q \cdot l^3}{222} + \frac{2}{3 \cdot l} \cdot \frac{107 \cdot q \cdot l^3}{444} - \frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12};$$

$$M_{y,B}^{BC} = -\frac{243}{444} \cdot q \cdot l^2 = -0,547 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,C}^{BC} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \left(-\frac{7}{222} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) + \frac{4 \cdot E \cdot I}{l_2} \cdot \left(-\frac{107}{444} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_2^2}{12},$$

$$M_{y,C}^{BC} = \frac{2}{3 \cdot l} \cdot \left(-\frac{7 \cdot q \cdot l^3}{222} \right) + \frac{4}{3 \cdot l} \cdot \left(-\frac{107 \cdot q \cdot l^3}{444} \right) - \frac{q \cdot (3 \cdot l)^2}{12},$$

$$M_{y,C}^{BC} = -\frac{485}{444} \cdot q \cdot l^2 = -1,092 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,C}^{CD} = -\frac{4 \cdot E \cdot I}{l_3} \cdot \left(-\frac{107}{444} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_3^2}{12} = \frac{4}{4 \cdot l} \cdot \frac{107 \cdot q \cdot l^3}{444} - \frac{q \cdot (4 \cdot l)^2}{12},$$

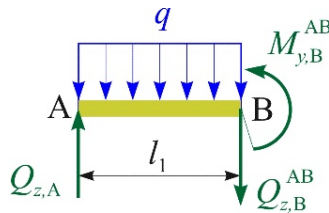
$$M_{y,C}^{CD} = -\frac{485}{444} \cdot q \cdot l^2 = -1,092 \cdot q \cdot l^2;$$

$$M_{y,D} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l_3} \cdot \left(-\frac{107}{444} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{q \cdot l_3^2}{12} = -\frac{2}{4 \cdot l} \cdot \frac{107 \cdot q \cdot l^3}{444} - \frac{q \cdot (4 \cdot l)^2}{12},$$

$$M_{y,D} = -\frac{1291}{888} \cdot q \cdot l^2 = -1,454 \cdot q \cdot l^2.$$

Razmatranjem ravnoteže odsječenih dijelova nosača nakon što su određeni momenti savijanja u karakterističnim presjecima nosača mogu se odrediti poprečne sile na način kako je to pokazano u prethodnim primjerima.

Za dio AB uvjeti ravnoteže glase (slika 6.42.):



Slika 6.42. Primjer 6.5.

$$\sum M_C = 0: -Q_{z,A} \cdot l_1 + M_{y,B}^{AB} + q \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} = 0,$$

$$Q_{z,A} = \frac{M_{y,B}^{AB}}{l_1} + \frac{q \cdot l_1}{2} = \frac{-0,547 \cdot q \cdot l^2}{2 \cdot l} + \frac{q \cdot 2 \cdot l}{2} = 0,727 \cdot q \cdot l;$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,A} + q \cdot l_1 + Q_{z,B}^{AB} = 0,$$

$$Q_{z,B}^{AB} = Q_{z,A} - q \cdot l_1 = 0,726 \cdot q \cdot l - q \cdot 2 \cdot l = -1,274 \cdot q \cdot l.$$

Unutar ovog dijela nosača poprečna sila jednaka je nuli na udaljenosti x_1 od oslonca A, koja se može dobiti kako slijedi:

$$Q_z = Q_{z,A} - q \cdot x_1 = 0,727 \cdot q \cdot l - q \cdot x_1 = 0,$$

$$x_1 = 0,727 \cdot l.$$

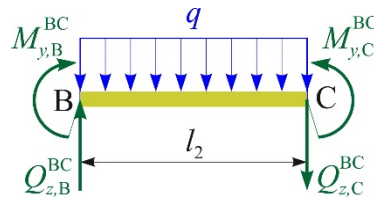
Izraz za moment savijanja glasi:

$$M_y = Q_{z,A} \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0,727 \cdot q \cdot x_1 - 0,5 \cdot q \cdot x_1^2,$$

a vrijednost lokalnog ekstrema je:

$$M_y(0,727 \cdot l) = 0,727 \cdot q \cdot 0,727 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (0,727 \cdot l)^2 = 0,264 \cdot q \cdot l^2.$$

Za dio BC uvjeti ravnoteže glase (slika 6.43.):



Slika 6.43. *Primjer 6.5.*

$$\sum M_C = 0: -Q_{z,B} \cdot l_2 - M_{y,B} + q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + M_{y,C} = 0,$$

$$Q_{z,B} = \frac{M_{y,C} - M_{y,B}}{l_2} + \frac{q \cdot l_2}{2} = \frac{-1,092 \cdot q \cdot l^2 - (-0,547 \cdot q \cdot l^2)}{3 \cdot l} + \frac{q \cdot 3 \cdot l}{2};$$

$$Q_{z,B} = 1,318 \cdot q \cdot l;$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,B} + q \cdot l_2 + Q_{z,C} = 0,$$

$$Q_{z,C} = Q_{z,B} - q \cdot l_2 = 1,318 \cdot q \cdot l - q \cdot 3 \cdot l = -1,682 \cdot q \cdot l.$$

Unutar ovog dijela nosača poprečna sila jednaka je nuli na udaljenosti x_2 od oslonca B, koja se može dobiti kako slijedi:

$$Q_z = Q_{z,B} - q \cdot x_2 = 1,318 \cdot q \cdot l - q \cdot x_2 = 0,$$

$$x_2 = 1,318 \cdot l.$$

Izraz za moment savijanja glasi:

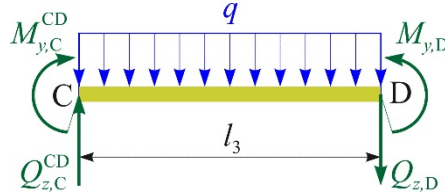
$$M_y = M_{y,B} + Q_{z,B} \cdot x_2 - q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = -0,547 \cdot q \cdot l^2 + 1,318 \cdot q \cdot x_2 - 0,5 \cdot q \cdot x_2^2,$$

a vrijednost lokalnog ekstrema je:

$$M_y(1,318 \cdot l) = -0,547 \cdot q \cdot l^2 + 1,318 \cdot q \cdot 1,318 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (1,318 \cdot l)^2,$$

$$M_y(1,318 \cdot l) = 0,322 \cdot q \cdot l^2.$$

Uvjeti ravnoteže za dio nosača CD glase (slika 6.44.):



Slika 6.44. Primjer 6.5.

$$\sum M_D = 0: -Q_{z,C}^{CD} \cdot l_3 - M_{y,C}^{CD} + q \cdot l_3 \cdot \frac{l_3}{2} + M_{y,D} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{CD} = \frac{M_{y,D} - M_{y,C}^{CD}}{l_3} + \frac{q \cdot l_3}{2} = \frac{-1,454 \cdot q \cdot l^2 - (-1,092 \cdot q \cdot l^2)}{4 \cdot l} + \frac{q \cdot 4 \cdot l}{2};$$

$$Q_{z,C}^{CD} = 1,910 \cdot q \cdot l;$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,C}^{CD} + q \cdot l_3 + Q_{z,D} = 0,$$

$$Q_{z,D} = Q_{z,C}^{CD} - q \cdot l_3 = 1,910 \cdot q \cdot l - q \cdot 4 \cdot l;$$

$$Q_{z,D} = -2,09 \cdot q \cdot l.$$

Unutar ovog dijela nosača poprečna sila jednaka je nuli na udaljenosti x_3 od oslonca C, koja se može dobiti kako slijedi:

$$Q_z = Q_{z,C}^{CD} - q \cdot x_3 = 1,910 \cdot q \cdot l - q \cdot x_3 = 0,$$

$$x_3 = 1,910 \cdot l.$$

Izraz za moment savijanja glasi:

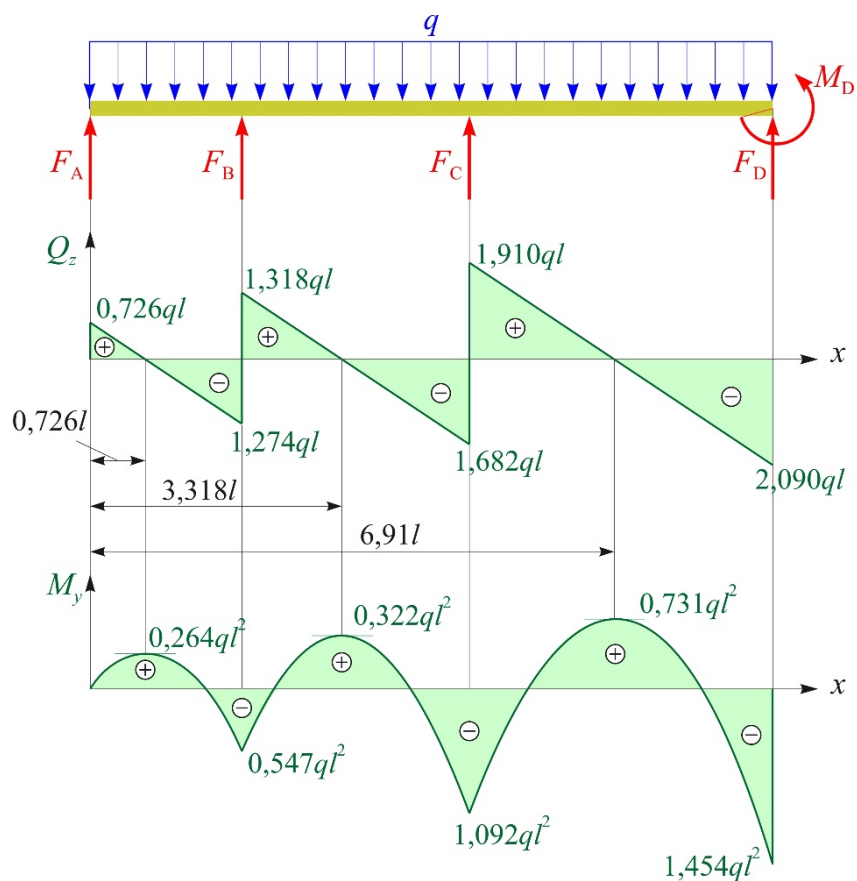
$$M_y = M_{y,C}^{CD} + Q_{z,C}^{CD} \cdot x_3 - q \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} = -1,092 \cdot q \cdot l^2 + 1,910 \cdot q \cdot x_3 - 0,5 \cdot q \cdot x_3^2,$$

a vrijednost lokalnog ekstrema je:

$$M_y(1,910 \cdot l) = -1,092 \cdot q \cdot l^2 + 1,910 \cdot q \cdot 1,910 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (1,910 \cdot l)^2,$$

$$M_y(1,910 \cdot l) = 0,732 \cdot q \cdot l^2.$$

Prema izračunanim vrijednostima za momente savijanja i poprečne sile u karakterističnim presjecima crtaju se dijagrami unutarnjih sila (slika 6.45.).

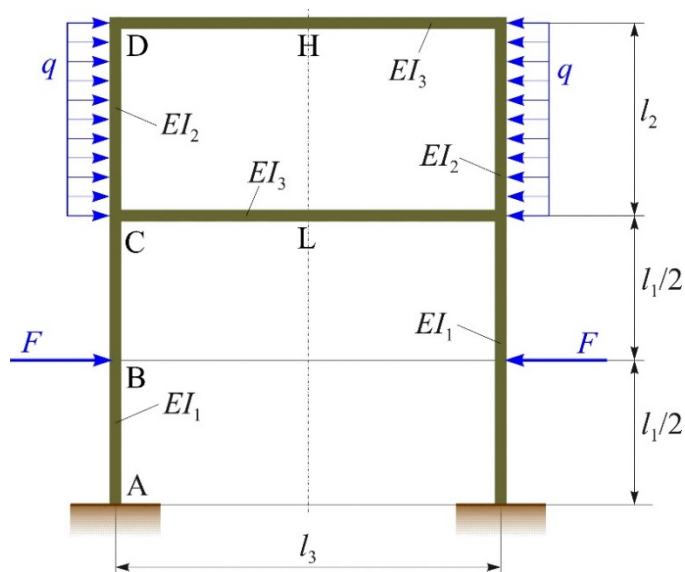


Slika 6.45. *Primjer 6.5.*

Primjer 6.6.

Za simetrični okviri nosač koji je opterećen simetrično prema slici 6.46. potrebno je odrediti dijagrame unutarnjih sila korištenjem metode pomaka.

Zadano je: q , l , $I_y = I$, E te $F = 2 \cdot q \cdot l$, $l_1 = 3 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $l_3 = 4 \cdot l$, $I_1 = 2 \cdot I$, $I_2 = 2 \cdot I$, $I_3 = I$.



Slika 6.46. *Primjer 6.6.*

Rješenje:

Zadani okvirni nosač ima četiri kruta slobodna čvora: čvorove C i D te njima simetrične čvorove s desne strane simetrale. Također postoje i dva linearna pomaka: horizontalni pomaci čvorova C i D, koji su istovjetni horizontalnim pomacima simetričnih čvorova s desne strane simetrale, jer se rastezanje horizontalnih dijelova nosača zanemaruje.

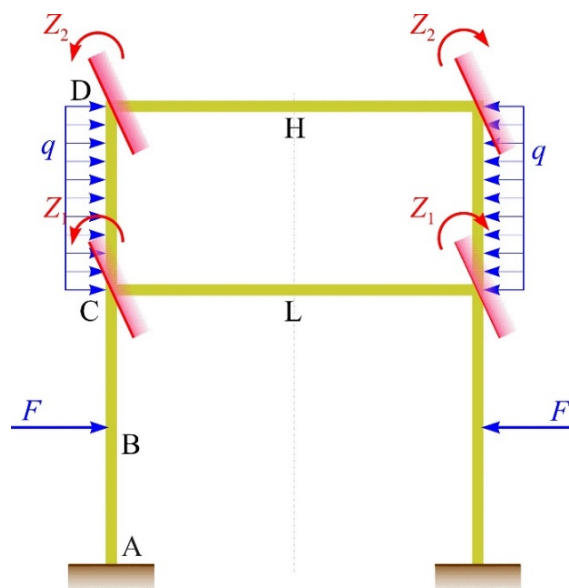
Dakle, može se pisati da je $N_\varphi = 4$, $N_\Delta = 2$, $N = N_\varphi + N_\Delta = 4 + 2 = 6$, pa bi zadatak bio šest puta kinematički neodređen.

Međutim, kako je okvirni nosač simetričan i opterećen simetrično, to će i deformirani oblik nosača nakon opterećenja biti simetričan, pa su kutni zakreti simetričnih čvorova po iznosu isti i suprotno usmjereni, dok su linearni pomaci jednaki nuli.

Stoga se može zaključiti da je zadatak dva puta kinematički neodređen (mogućnost zakretanja slobodnih čvorova C i D).

Osnovna konstrukcija (ekvivalentna kinematički određena) dobije se iz zadane umetanjem dodatnih uklještenja u čvorovima C i D, koji sprječavaju kutne zakrete istih čvorova.

Osnovna konstrukcija bit će ekvivalentna zadanoj ako se na mjestima prekobrojnih veza (uklještenja u C i D) dodaju odgovarajući kutni pomaci Z_1 i Z_2 . Time je osnovna konstrukcija svedena na šest odvojenih nosača (slika 6.47).



Slika 6.47. Primjer 6.6.

Za rješavanje zadatka dovoljno je razmatrati pola konstrukcije pa će se u daljnjem proračunu gledati dio okvirnog nosača lijevo od simetrale.

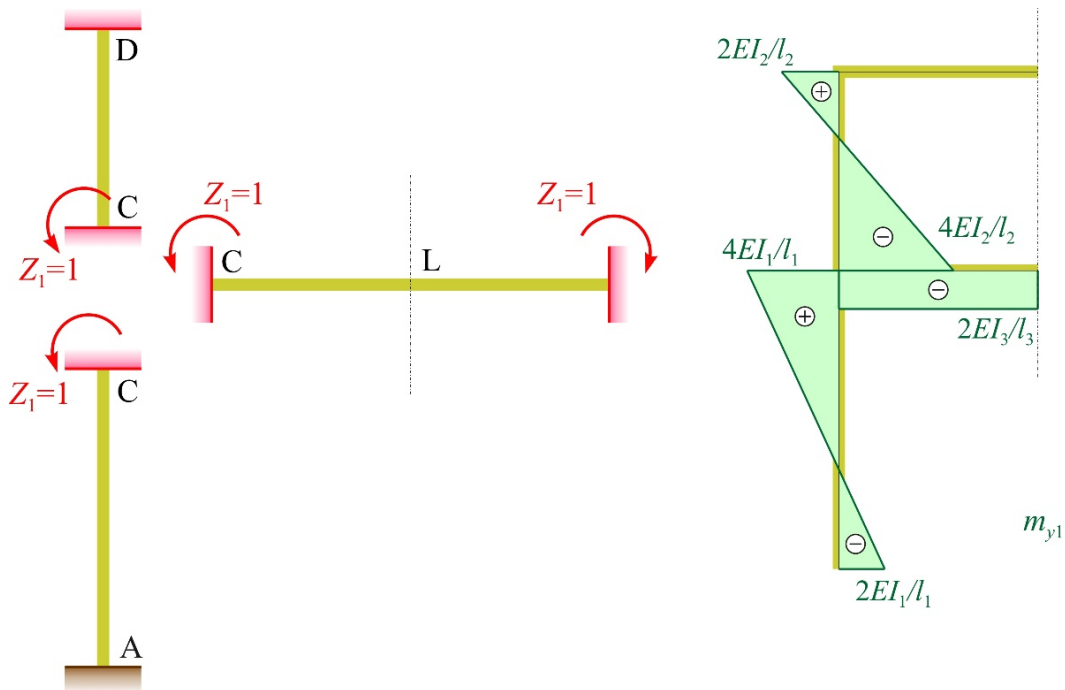
Osnovne jednačbe metode pomaka prema (6.4) glase:

$$k_{21} \cdot Z_1 + k_{22} \cdot Z_2 + Q_{2F} = 0$$

$$k_{11} \cdot Z_1 + k_{12} \cdot Z_2 + Q_{1F} = 0.$$

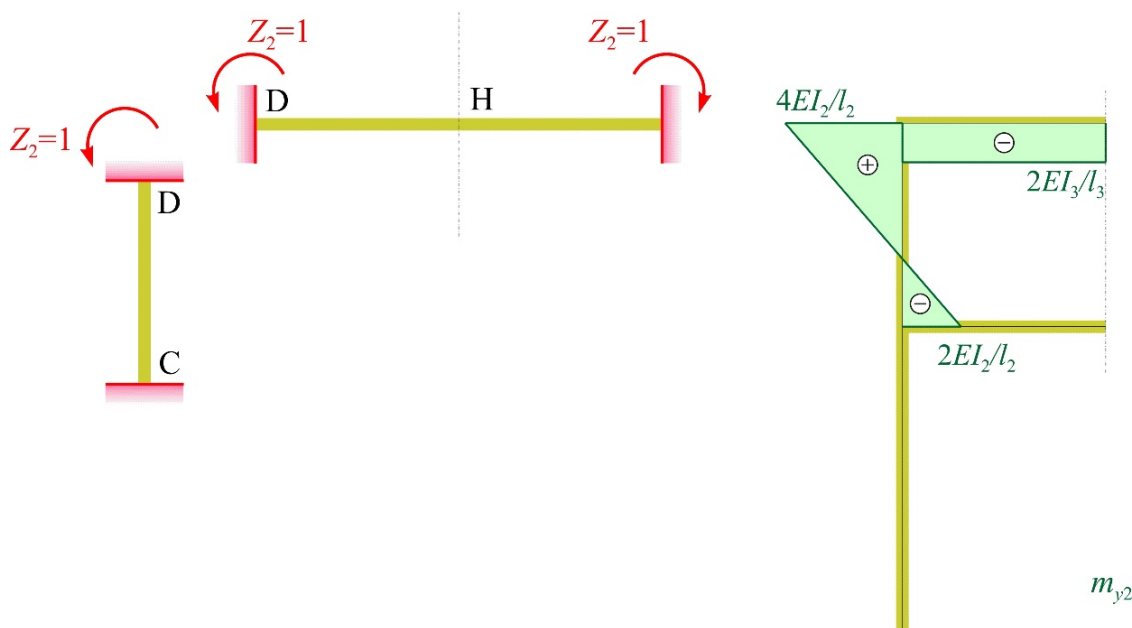
Za određivanje svih koeficijenata u gornjim jednažbama treba nacrtati dijagrame momenata savijanja od jediničnih kutnih zakreta $Z_1 = 1$ i $Z_2 = 1$, kao i dijagram momenta savijanja od vanjskog opterećenja.

Dijagram momenta savijanja m_{y1} za dijelove nosača AC, CD, CL i DH zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_1 = 1$ prikazan je na slici 6.48.



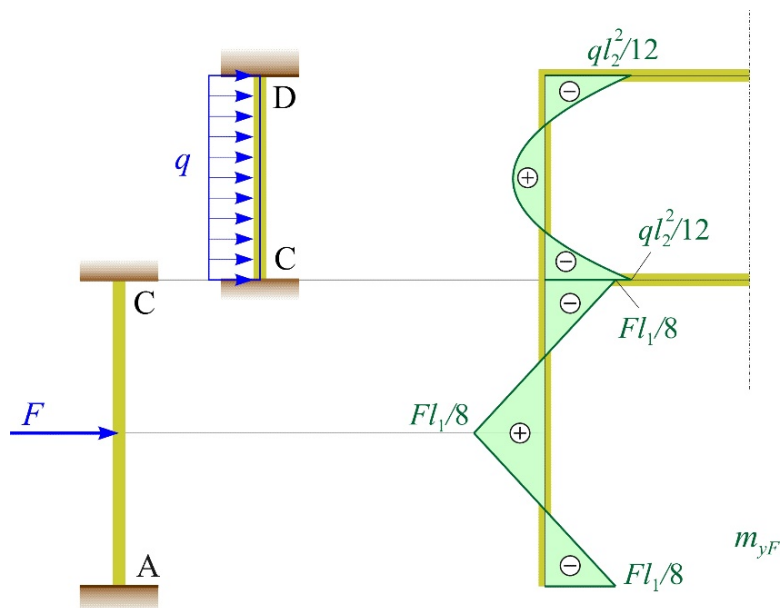
Slika 6.48. *Primjer 6.6*

Dijagram momenta savijanja m_{y2} za iste dijelove nosača zbog jediničnog kutnog zakreta $Z_2 = 1$ prikazan je na slici 6.49.



Slika 6.49. *Primjer 6.6*

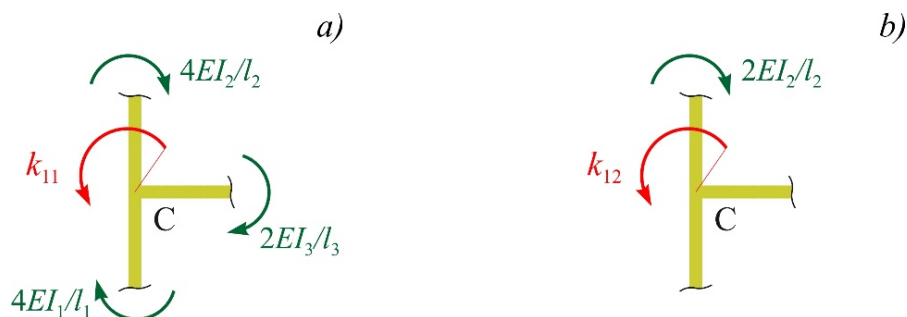
Dijagram momenta savijanja od vanjskog opterećenja dan je na slici 6.50.



Slika 6.50. *Primjer 6.6.*

Koeficijenti u kanonskim jednadžbama metode pomaka dobiveni su iz uvjeta ravnoteže (momentna jednadžba) čvorova isječenih s bliskim presjecima iz okvirnog nosača kako je napisano u nastavku.

Prema slici 6.51.a je:



Slika 6.51. *Primjer 6.6.*

$$\sum M_C = 0: k_{11} - \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} - \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} + \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} + \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = \frac{4 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{3 \cdot l} + \frac{4 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} + \frac{2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l} = \frac{43}{6} \cdot \frac{E \cdot I}{l},$$

dok se prema slici 6.51.b može dobiti:

$$\sum M_B = 0: k_{12} - \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = 0,$$

$$k_{12} = \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = \frac{2 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} = 2 \cdot \frac{E \cdot I}{l}.$$

Dalje je prema slici 6.52.a:

$$\sum M_D = 0: k_{22} - \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = 0,$$

$$k_{22} = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} + \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} = \frac{4 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} + \frac{2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l} = \frac{9}{2} \cdot \frac{E \cdot I}{l},$$

a)

b)



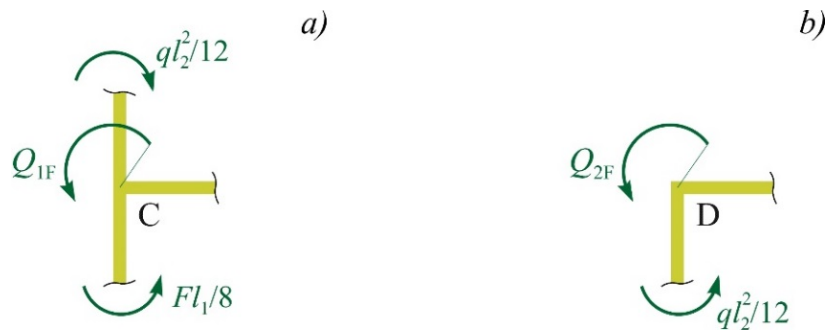
Slika 6.52. Primjer 6.6.

dok se prema slici 6.52.b može dobiti:

$$\sum M_D = 0: k_{21} - \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = 0,$$

$$k_{21} = \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} = \frac{2 \cdot E \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} = 2 \cdot \frac{E \cdot I}{l}.$$

Na isti način dobiju se slobodni koeficijenti u kanonskim jednadžbama metode pomaka prema slici 6.53.a:



Slika 6.53. Primjer 6.6.

$$\sum M_C = 0: Q_{1F} + \frac{F \cdot l_1}{8} - \frac{q \cdot l_2^2}{12} = 0,$$

$$Q_{1F} = -\frac{F \cdot l_1}{8} + \frac{q \cdot l_2^2}{12} = -\frac{0,5 \cdot q \cdot l \cdot 3 \cdot l}{8} + \frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12} = \frac{7}{48} \cdot q \cdot l^2,$$

odnosno prema slici 6.53.b:

$$\sum M_D = 0: Q_{2F} + \frac{q \cdot l_2^2}{12} = 0,$$

$$Q_{2F} = -\frac{q \cdot l_2^2}{12} = -\frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12} = -\frac{q \cdot l^2}{3}.$$

Kanonske jednačbe sada glase:

$$\frac{43 \cdot E \cdot I}{6 \cdot l} \cdot Z_1 + \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \cdot Z_2 + \frac{7 \cdot q \cdot l^2}{48} = 0$$

$$\frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \cdot Z_1 + \frac{9 \cdot E \cdot I}{2 \cdot l} \cdot Z_2 - \frac{q \cdot l^2}{3} = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednačaba dobije se:

$$Z_1 = -\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}, \quad Z_2 = \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I}.$$

Konačne vrijednosti momenta savijanja u karakterističnim točkama nosača računaju se prema izrazu (6.6):

$$M_{y,T} = m_{1y,T} \cdot Z_1 + m_{2y,T} \cdot Z_2 + M_{yF,T}.$$

Sada je:

$$M_{y,A} = -\frac{2 \cdot E \cdot I_1}{l_1} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{F \cdot l_1}{8} = \frac{2 \cdot 2 \cdot I}{3 \cdot l} \cdot \frac{127 \cdot q \cdot l^3}{2712 \cdot I} - \frac{0,5 \cdot q \cdot l \cdot 3 \cdot l}{8},$$

$$M_{y,A} = -\frac{2035}{16272} \cdot q \cdot l^2 = -0,125 \cdot 20 \cdot 1^2 = -2,50 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,B} = \frac{E \cdot I_1}{l_1} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) + \frac{F \cdot l_1}{8} = -\frac{2 \cdot I}{3 \cdot l} \cdot \frac{127 \cdot q \cdot l^3}{2712 \cdot I} + \frac{0,5 \cdot q \cdot l \cdot 3 \cdot l}{8},$$

$$M_{y,B} = \frac{2543}{16272} \cdot q \cdot l^2 = 0,1563 \cdot 20 \cdot 1^2 = 3,13 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{AC} = \frac{4 \cdot E \cdot I_1}{l_1} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{F \cdot l_1}{8} = -\frac{4 \cdot 2 \cdot I}{3 \cdot l} \cdot \frac{127 \cdot q \cdot l^3}{2712 \cdot I} - \frac{0,5 \cdot q \cdot l \cdot 3 \cdot l}{8},$$

$$M_{y,C}^{AC} = -\frac{5083}{16272} \cdot q \cdot l^2 = -0,3124 \cdot 20 \cdot 1^2 = -6,25 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{CD} = -\frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) - \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{q \cdot l_2^2}{12},$$

$$M_{y,C}^{CD} = -\frac{4 \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} \right) - \frac{2 \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} - \frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12},$$

$$M_{y,C}^{CD} = -\frac{683}{2034} \cdot q \cdot l^2 = -0,336 \cdot 20 \cdot 1^2 = -6,72 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D}^{CD} = \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{l_2} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) + \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{q \cdot l_2^2}{12},$$

$$M_{y,D}^{CD} = \frac{2 \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} \right) + \frac{4 \cdot 2 \cdot I}{2 \cdot l} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} - \frac{q \cdot (2 \cdot l)^2}{12},$$

$$M_{y,D}^{CD} = \frac{-193}{4068} \cdot q \cdot l^2 = -0,047 \cdot 20 \cdot 1^2 = -0,949 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{CL} = -\frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot l} \cdot \frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} = \frac{127}{5424} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,C}^{CL} = \frac{127}{5424} \cdot q \cdot l^2 = 0,0234 \cdot 20 \cdot 1^2 = 0,468 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,L} = -\frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} \cdot \left(-\frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} \right) = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot l} \cdot \frac{127}{2712} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} = \frac{127}{5424} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,L} = \frac{127}{5424} \cdot q \cdot l^2 = 0,0234 \cdot 20 \cdot 1^2 = 0,468 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D}^{DH} = -\frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} = -\frac{2 \cdot I}{4 \cdot l} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} = -\frac{193}{4068} \cdot q \cdot l^2,$$

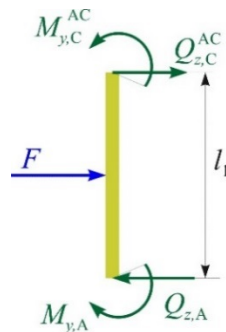
$$M_{y,D}^{DH} = -\frac{193}{4068} \cdot q \cdot l^2 = -0,0474 \cdot 20 \cdot 1^2 = -0,949 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,H} = -\frac{2 \cdot E \cdot I_3}{l_3} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{E \cdot I} = -\frac{2 \cdot I}{4 \cdot l} \cdot \frac{193}{2034} \cdot \frac{q \cdot l^3}{I} = -\frac{193}{4068} \cdot q \cdot l^2,$$

$$M_{y,H} = -\frac{193}{4068} \cdot q \cdot l^2 = -0,0474 \cdot 20 \cdot 1^2 = -0,949 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Razmatranjem ravnoteže odsječenih dijelova nosača nakon što su određeni momenti savijanja u karakterističnim presjecima nosača, mogu se odrediti poprečne sile na način kako je to pokazano u prethodnim primjerima.

Za dio AC uvjeti ravnoteže glase (slika 6.54.):



Slika 6.54. Primjer 6.6.

$$\sum M_C = 0: -Q_{z,A} \cdot l_1 - M_{y,A} + F \cdot \frac{l_1}{2} + M_{y,C}^{AC} = 0,$$

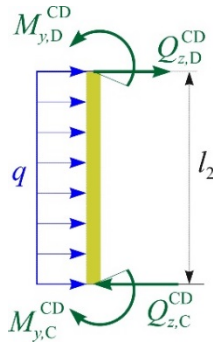
$$Q_{z,A} = \frac{M_{y,C}^{AC} - M_{y,A}}{l_1} + \frac{F}{2} = \frac{-0,3124 \cdot q \cdot l^2 - (-0,125 \cdot q \cdot l^2)}{3 \cdot l} + \frac{0,5 \cdot q \cdot l}{2},$$

$$Q_{z,A} = 0,1875 \cdot q \cdot l = 0,1875 \cdot 20 \cdot 1 = 3,75 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,A} + F + Q_{z,C}^{AC} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{AC} = Q_{z,A} - F = 0,1875 \cdot q \cdot l - 0,5 \cdot q = -0,3125 \cdot q \cdot l = -6,25 \text{ kN}.$$

Za dio CD uvjeti ravnoteže za odsječeni dio okvirnog nosača glase (slika 6.55.):



Slika 6.55. Primjer 6.6.

$$\sum M_D = 0: -Q_{z,C}^{CD} \cdot l_2 - M_{y,C}^{CD} + q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + M_{y,D}^{CD} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{CD} = \frac{M_{y,D}^{CD} - M_{y,C}^{CD}}{l_2} + \frac{q \cdot l_2}{2} = \frac{-0,047 \cdot q \cdot l^2 - (-0,336 \cdot q \cdot l^2)}{2 \cdot l} + \frac{q \cdot (2 \cdot l)}{2},$$

$$Q_{z,C}^{CD} = 1,144 \cdot q \cdot l = 1,144 \cdot 20 \cdot 1 = 22,88 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,C}^{CD} + q \cdot l_2 + Q_{z,D}^{CD} = 0,$$

$$Q_{z,D}^{CD} = Q_{z,C}^{CD} - q \cdot l_2 = 1,144 \cdot q \cdot l - q \cdot (2 \cdot l) = -0,856 \cdot q \cdot l = -0,856 \cdot 20 \cdot 1;$$

$$Q_{z,D}^{CD} = -17,12 \text{ kN}.$$

Unutar ovog dijela nosača poprečna sila jednaka je nuli na udaljenosti x_1 od oslonca C, koja se može dobiti kako slijedi:

$$Q_z = Q_{z,C}^{CD} - q \cdot x_1 = 1,144 \cdot q \cdot l - q \cdot x_1 = 0,$$

$$x_1 = 1,144 \cdot l.$$

Izraz za moment savijanja glasi:

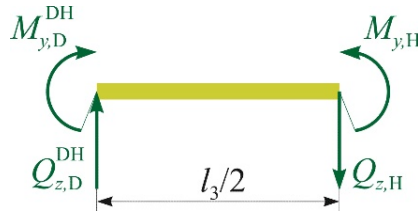
$$M_y = M_{y,C}^{CD} + Q_{z,C}^{CD} \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -0,336 \cdot q \cdot l^2 + 1,144 \cdot q \cdot x_1 - 0,5 \cdot q \cdot x_1^2,$$

a vrijednost lokalnog ekstrema je:

$$M_y(1,144 \cdot l) = -0,336 \cdot q \cdot l^2 + 1,144 \cdot q \cdot 1,144 \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot (1,144 \cdot l)^2,$$

$$M_y(1,144 \cdot l) = 0,3184 \cdot q \cdot l^2 = 0,3184 \cdot 20 \cdot l^2 = 6,37 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Za dio okvirnog nosača CL uvjeti ravnoteže glase (slika 6.56.):



Slika 6.56. *Primjer 6.6.*

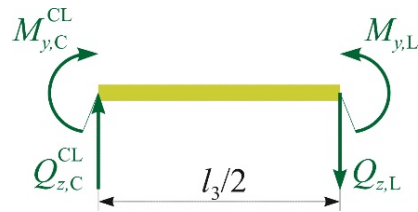
$$\sum M_L = 0: -Q_{z,C}^{CL} \cdot \frac{l_3}{2} - M_{y,C}^{CL} + M_{y,L} = 0,$$

$$Q_{z,C}^{CL} = \frac{M_{y,L} - M_{y,C}^{CL}}{\frac{l_3}{2}} = \frac{0,0234 \cdot q \cdot l^2 - 0,0234 \cdot q \cdot l^2}{2 \cdot l} = 0 \text{ kN},$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,C}^{CL} + Q_{z,L} = 0,$$

$$Q_{z,L} = Q_{z,C}^{CL} = 0 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za dio okvirnog nosača DH su (slika 6.57.):



Slika 6.57. *Primjer 6.6.*

$$\sum M_H = 0: -Q_{z,D}^{DH} \cdot \frac{l_3}{2} - M_{y,D}^{DH} + M_{y,H} = 0,$$

$$Q_{z,D}^{DH} = \frac{M_{y,H} - M_{y,D}^{DH}}{\frac{l_3}{2}} = \frac{-0,0474 \cdot q \cdot l^2 - (-0,0474 \cdot q \cdot l^2)}{2 \cdot l} = 0 \text{ kN},$$

$$\sum F_z = 0: -Q_{z,D}^{DH} + Q_{z,H} = 0,$$

$$Q_{z,H} = Q_{z,D}^{DH} = 0 \text{ kN}.$$

Uzdužne sile u dijelovima okvirnog nosača mogu se dobiti iz relevantnih uvjeta ravnoteže postavljenih za čvorove izrezane iz nosača bliskim presjecima.

Tako je prema slici 6.58.a dobivena uzdužna sila za dio CD:



Slika 6.58. Primjer 6.6.

$$\sum F_z = 0: -N_{CD} - Q_{z,D}^{DH} = 0,$$

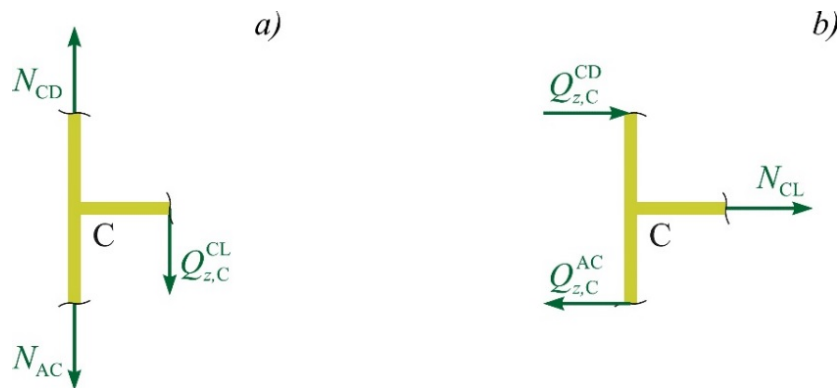
$$N_{CD} = -Q_{z,D}^{DH} = 0;$$

a prema slici 6.58.b uzdužna sila za dio DH:

$$\sum F_x = 0: N_{DH} - Q_{z,D}^{CD} = 0,$$

$$N_{DH} = Q_{z,D}^{CD} = -0,856 \cdot q \cdot l = -0,856 \cdot 20 \cdot 1 = -17,12 \text{ kN}.$$

Razmatranjem relevantne jednadžbe ravnoteže za čvor C prema slici 6.59.a može se dobiti uzdužna sila za dio AC:



Slika 6.59. Primjer 6.6.

$$\sum F_z = 0: -N_{AC} + N_{CD} - Q_{z,C}^{CL} = 0,$$

$$N_{AC} = N_{CD} - Q_{z,C}^{CL} = 0 - 0 = 0 \text{ kN};$$

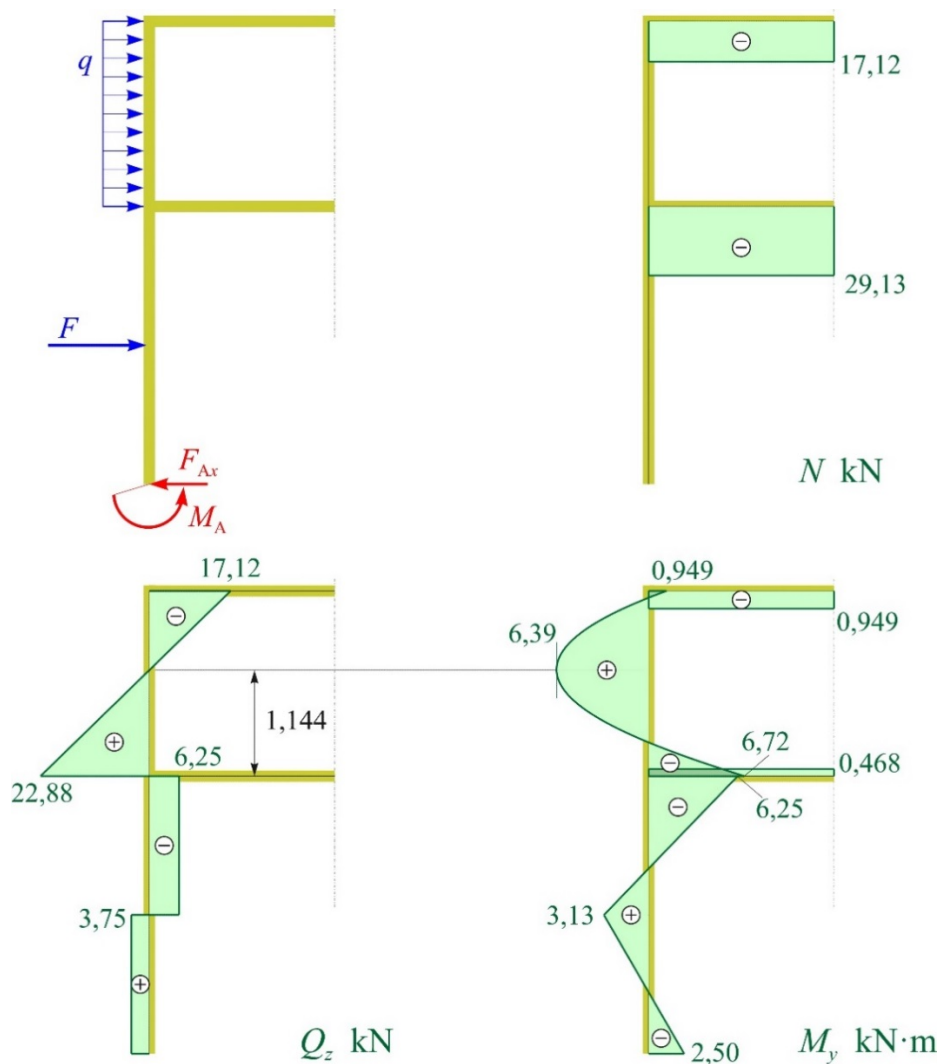
a razmatranjem relevantne jednadžbe ravnoteže za čvor C prema slici 6.59.b može se dobiti uzdužna sila za dio CL:

$$\sum F_x = 0: N_{CL} - Q_{z,C}^{AC} + Q_{z,C}^{CD} = 0,$$

$$N_{CL} = Q_{z,C}^{AC} - Q_{z,C}^{CD} = -0,3125 \cdot q \cdot l - 1,144 \cdot q \cdot l$$

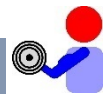
$$N_{CL} = -1,457 \cdot q \cdot l = -1,457 \cdot 20 \cdot 1 = -29,14 \text{ kN}.$$

Nakon izračunavanja unutarnjih sila u svim karakterističnim presjecima crtaju se njihovi dijagrami, koji su prikazani na slici 6.60.



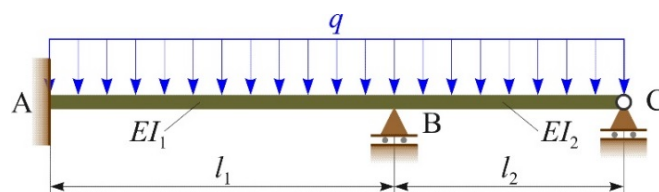
Slika 6.60. Primjer 6.6.

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 6.1. Za linijski nosač prema slici Z.6.1. treba odrediti dijagrame poprečnih sila i momenta savijanja primjenom metode pomaka.

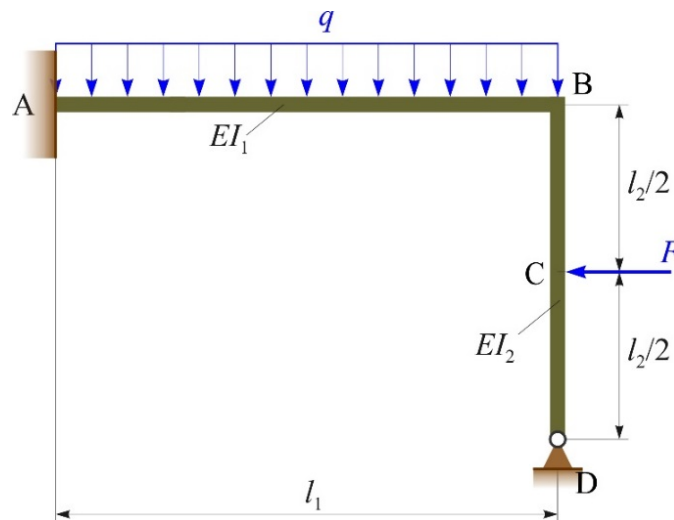
Zadano je: q , l , I_y , E , $l_1 = 3 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $I_1 = I_y$, $I_2 = I_y$, $q = 12 \text{ kN/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$.



Slika Z.6.1. Zadatak 6.1.

Zadatak 6.2. Za okvirni nosač prema slici Z.6.2. potrebno je, koristeći se metodom pomaka, odrediti dijagrame unutarnjih sila.

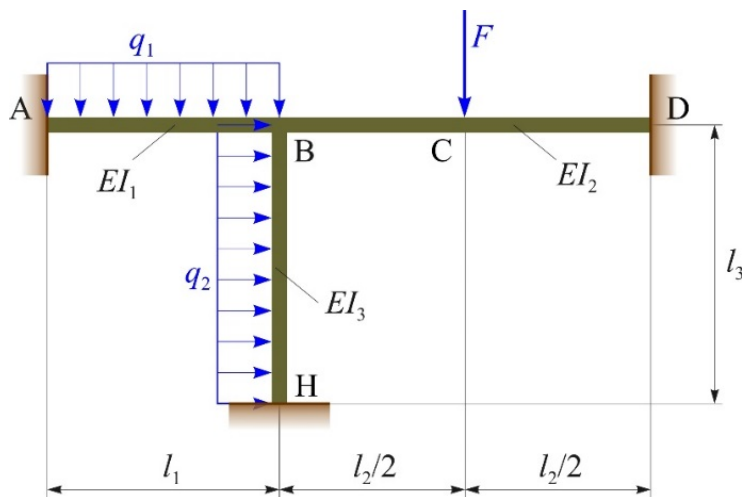
Zadano je: $q = 4 \text{ kN/m}$, $F = 10 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, E , I_y , $l_1 = 3 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $I_1 = 2 \cdot I_y$, $I_2 = I_y$.



Slika Z.6.2. Zadatak 6.2.

Zadatak 6.3. Okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici Z.6.3. Potrebno je odrediti dijagrame poprečnih sila i momenta savijanja koristeći se metodom pomaka.

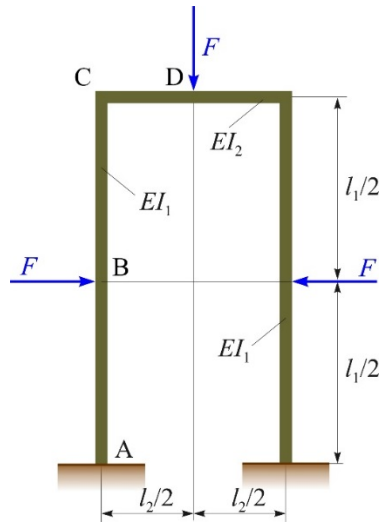
Zadano je: $q_1 = 12 \text{ kN/m}$, $q_2 = 8 \text{ kN/m}$, $F = 20 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, E , I_y , $l_1 = 2,5 \cdot l$, $l_2 = 4 \cdot l$, $l_3 = 3 \cdot l$, $I_1 = 2 \cdot I_y$, $I_2 = 2 \cdot I_y$, $I_3 = I_y$.



Slika Z.6.3. Zadatak 6.3.

Zadatak 6.4. Simetrični okvirni nosač zadan je i opterećen prema slici Z.6.4. Potrebno je odrediti dijagrame unutarnjih sila koristeći se metodom pomaka.

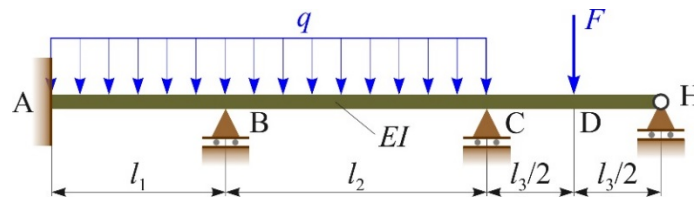
Zadano je: $F = 18 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, E , I_y , $l_1 = 4 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $I_1 = 2 \cdot I_y$, $I_2 = I_y$.



Slika Z.6.4. Zadatak 6.4.

Zadatak 6.5. Za linijski nosač zadan i opterećen prema slici Z.6.5. potrebno je odrediti dijagrame unutarnjih sila pomoću metode pomaka.

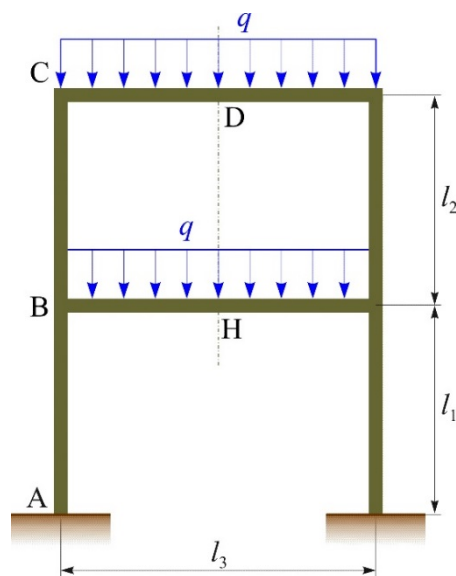
Zadano je: $F = 12 \text{ kN}$, $q = 8 \text{ kN/m}$, $l = 1 \text{ m}$, E , I_y , $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 3 \cdot l$, $l_3 = 2 \cdot l$.



Slika Z.6.5. Zadatak 6.5.

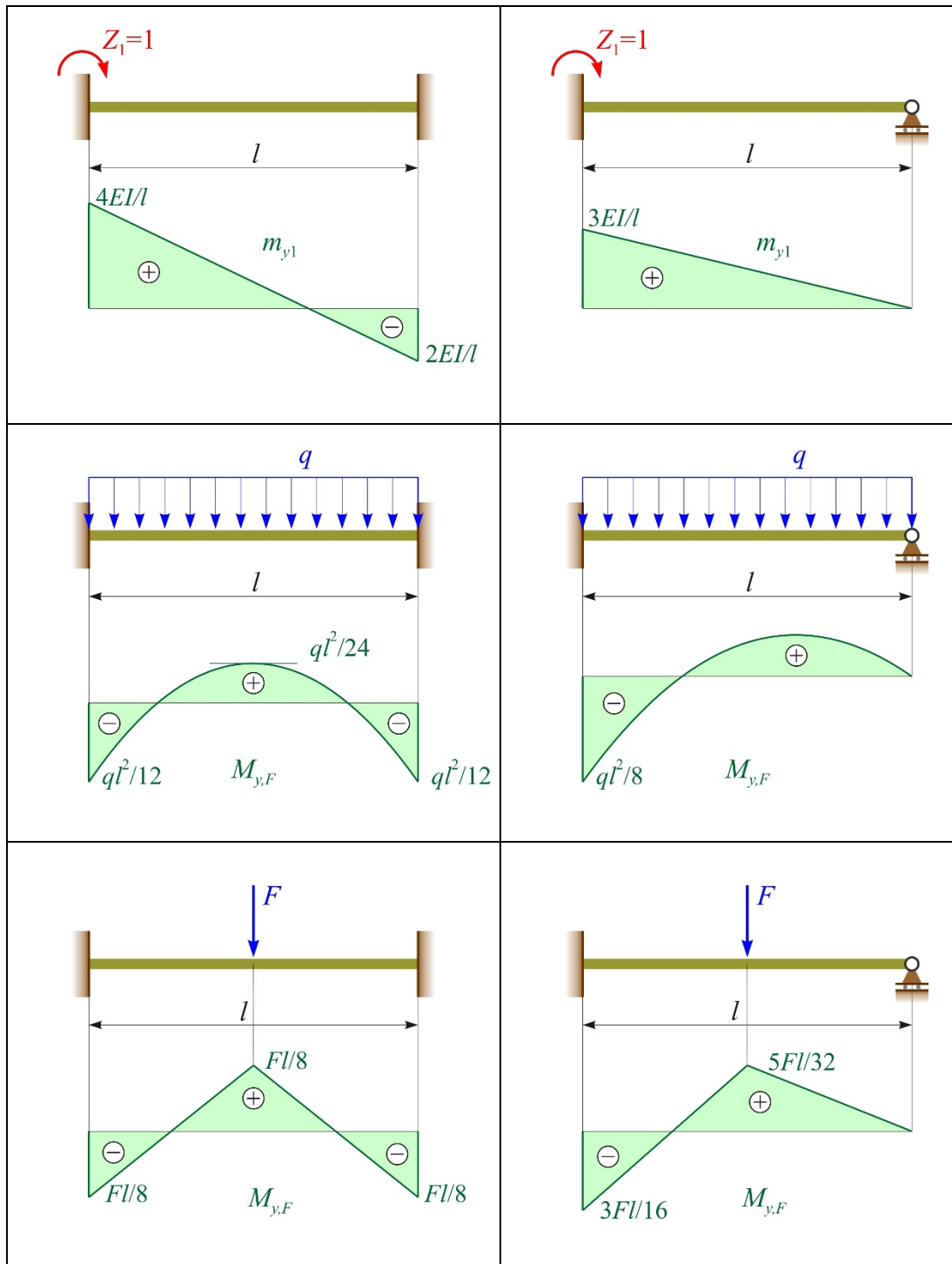
Zadatak 6.6. Za simetrični okvirni nosač, simetrično opterećen prema slici Z.6.6., valja pomoću metode pomaka odrediti dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $q = 20 \text{ kN/m}$, $l = 1 \text{ m}$, E , I_y , $l_1 = 2 \cdot l$, $l_2 = 2 \cdot l$, $l_3 = 3 \cdot l$.



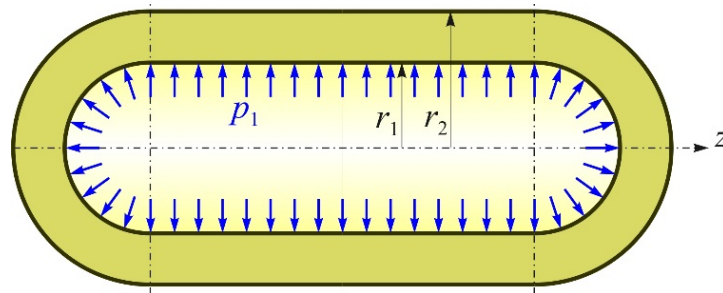
Slika Z.6.6. Zadatak 6.6.

Tablica 6.1. Dijagrami momenta savijanja zbog jediničnog kutnog zakreta i zbog djelovanja vanjskog opterećenja



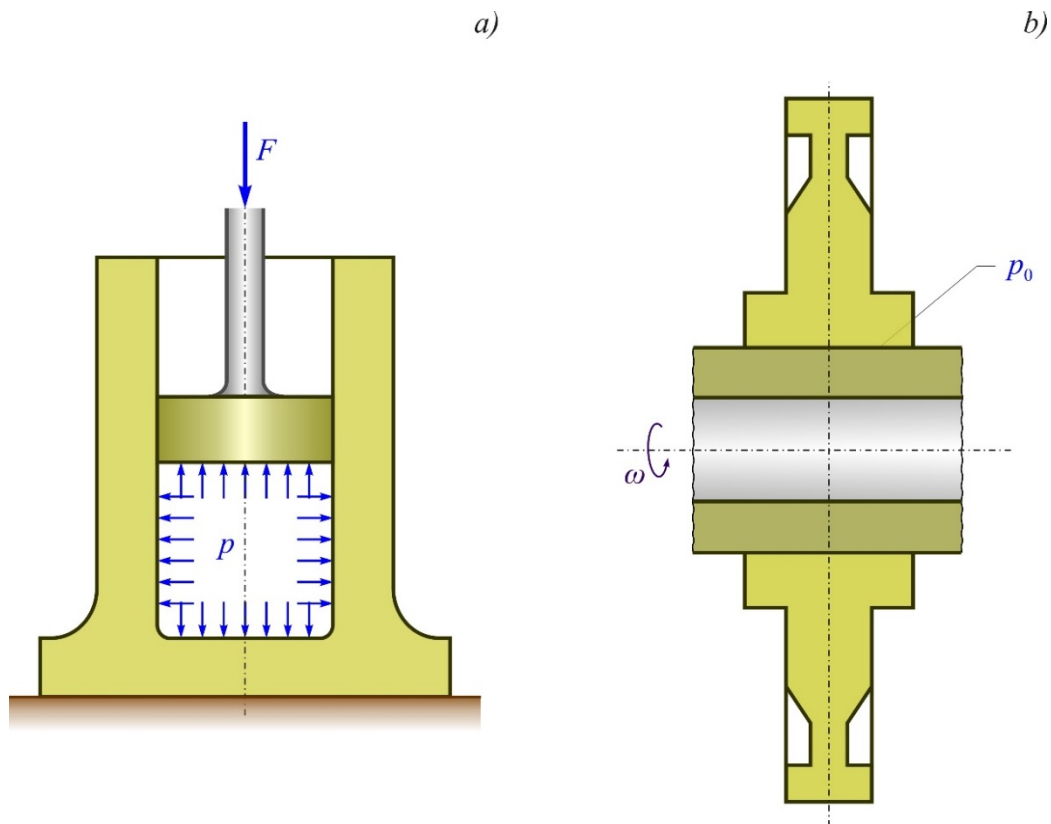
7. DEBELOSTJENE CILINDRIČNE POSUDE I CIJEVI

Debelostjena posuda (slika 7.1.) i debelostjena cijev imaju široku primjenu u strojarstvu, brodstrojarstvu i elektrostrojarstvu. Vrlo je široka njihova primjena u energetici, osobito u nuklearnoj energetici. U procesnim i kemijskim postrojenjima susrest ćemo debelostjene posude kao spremnike za kapljevine i plinove pod visokim tlakom ili kao cjevovode za te fluide.



Slika 7.1. Debelostjena posuda

Debelostjenu cijev susrest ćemo kao kućište visokotlačne stapne pumpe i stapnoga kompresora, a u nuklearnoj elektrani naići ćemo na snopove debelostjenih cijevi u parogeneratoru, kao i na brodovima i podmornicama na nuklearni pogon.

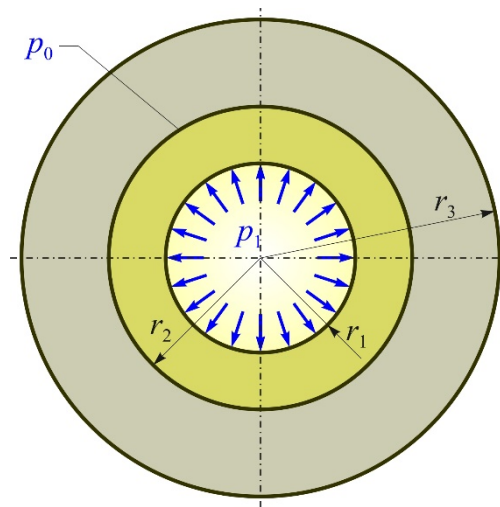


Slika 7.2. a) cilindar hidraulične preše, b) osovina parne i plinske turbine s navučenim diskom

U nekim posebnim tehnologijama, kao npr. kovanju, gdje treba ostvariti velike radne sile, debelostjenu cijev prepoznat ćemo kao cilindar hidraulične preše (slika 7.2.a). Jednako tako, često ćemo ju naći kao cilindar u raznim hidrauličnim i pneumatskim mehanizmima na dizalicama, raznim transportnim uređajima, brodovima, kamionima, vagonima i lokomotivama.

Debelostjena cijev ima primjenu i u brodskom pogonskom sustavu kao osovina za pogon broda. Susret ćemo ju i na hidrocentralama kao osovinu vertikalnog hidrogeneratora i vodne turbine, ali i u termoenergetskim postrojenjima kao osovinu parne i plinske turbine na koju su steznim spojem navučeni diskovi (slika 7.2.b).

Pri izradi topničkih oruđa (topovske cijevi) poznata je tehnologija sastavljanja (navlačenja) dviju ili čak triju debelostjenih cijevi jedne na drugu. Time se postiže znatno smanjenje naprezanja u unutarnjoj cijevi prilikom ispaljenja granate (slika 7.3.).



Slika 7.3. Poprečni presjek topovske cijevi – jedna cijev navučena je na drugu.

7.1. GEOMETRIJA, OPTEREĆENJE, OGRANIČENJA I PRETPOSTAVKE O DEFORMIRANJU I RASPODJELI NAPREZANJA

Da bismo šuplji cilindar smatrali debelostjenim cilindrom, mora biti ispunjen sljedeći kriterij:

$$\delta = r_2 - r_1 > \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad (7.1)$$

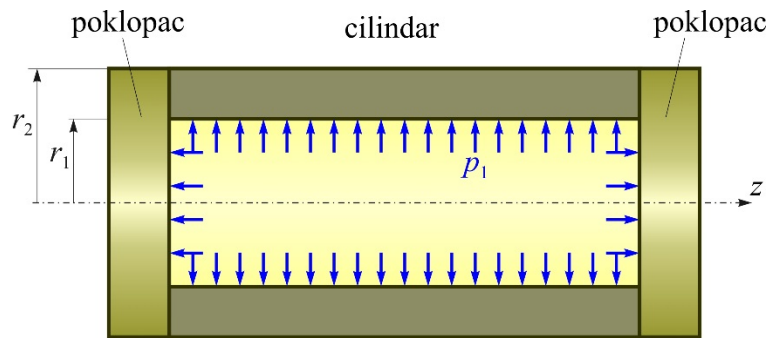
gdje su (slika 7.4.):

r_1 – unutarnji promjer cijevi

r_2 – vanjski promjer cijevi

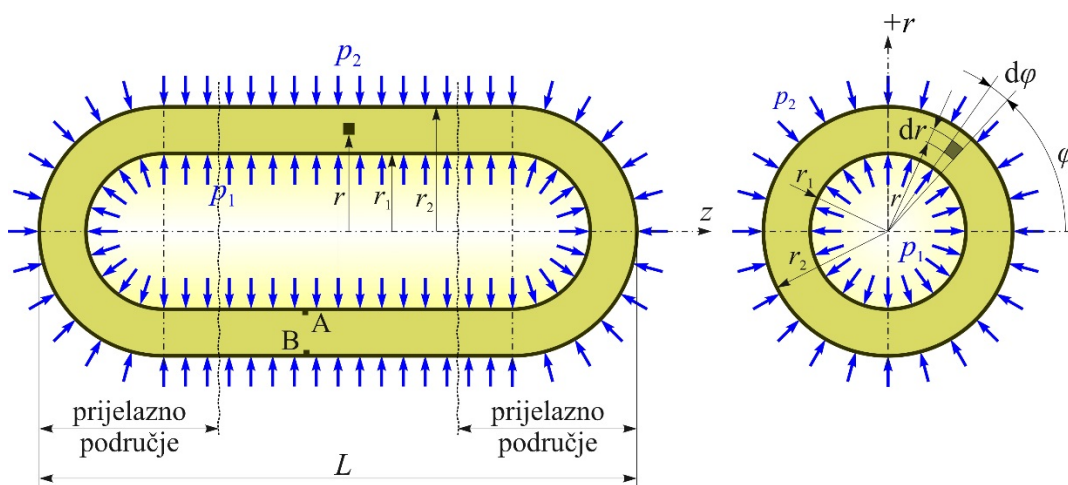
δ – debljina stijenke.

Ako uvjet (7.1) nije ispunjen, radi se o tankoj cilindričnoj ljusci pa formule za izračun naprezanja i pomaka koje se javljaju u ovom poglavlju neće vrijediti za proračun takvih ljusaka.



Slika 7.4. Debelostijena cijev opterećena unutarnjim tlakom

Za analizu naprezanja, deformacija i pomaka u debelostjenim posudama i cijevima prikladan je cilindrični koordinatni sustav r, φ, z (slika 7.5.).



Slika 7.5. Debelostijena posuda opterećena unutarnjim i vanjskim tlakom s koordinatnim sustavom

Debelostijena cijev, odnosno posuda, aksijalno je simetrična, aksijalno simetrično učvršćena i opterećena. Zbog toga naprezanja, deformacije i pomaci neće ovisiti o koordinatama φ i z , nego će biti funkcija samo jedne varijable polumjera r .

Cijev je podvrgnuta samo radijalnom opterećenju. Najčešće je to samo unutarnji i/ili vanjski tlak. Neće se razmatrati utjecaj koncentriranih sila i koncentriranih spregova sila na naprezanja i pomake u posudi odnosno cijevi. Nećemo moći odrediti naprezanja i pomake u blizini dna zatvorenih posuda i cijevi, tj. ne razmatraju se naprezanja u tzv. prijelaznom području čija je duljina jednaka približno jednom promjeru cijevi. Svi izvedeni analitički izrazi vrijedit će za presjeke dovoljno udaljene od krajeva posude/cijevi.

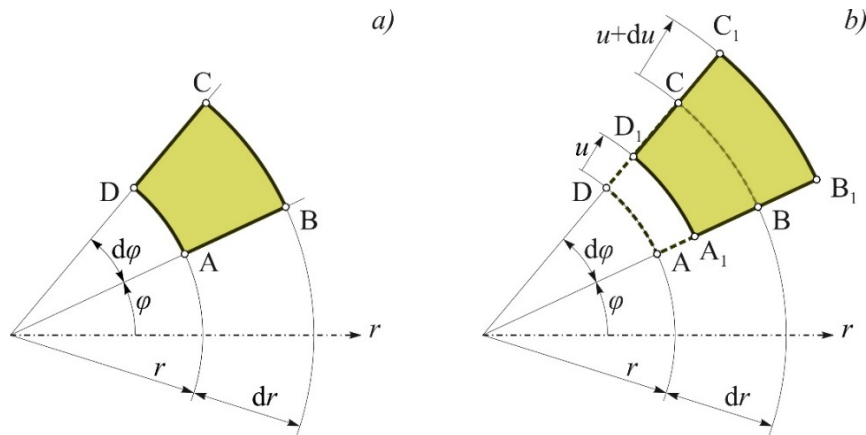
Posuda ili cijev promatra se kao dugački šuplji cilindar kojemu je duljina najmanje pet puta veća od promjera cijevi/posude.

Aksijalno naprezanje σ_z jednoliko je raspodijeljeno po poprečnom presjeku cijevi/posude.

Uvodi se pretpostavka da vrijedi Hookeov zakon, tj. sve komponente tenzora naprezanja manje su od granice tečenja materijala, što znači da ne dolazi do pojave plastičnih deformacija u stijenci debele cijevi/posude.

7.2. GEOMETRIJSKA ANALIZA

Neka je iz stijenke debele cijevi izdvojen diferencijalni element prema slici 7.6.a.



Slika 7.6. Geometrijska analiza pomaka diferencijalnog elementa: a) početni nedeformirani oblik, b) usporedba konačnog deformiranog i početnog nedeformiranog elementa.

Tijekom deformiranja pojedine točke mogu se pomicati samo u radijalnom pravcu. Radijalni pomak u ovisit će o položaju točke unutar stijenke cijevi, tj. bit će funkcija samo polumjera r . Slika 7.6.b prikazuje nedeformirani diferencijalni element ABCD i element nakon deformiranja $A_1B_1C_1D_1$.

Točke A i D pomaknut će se radijalno za iznos u , dok će se točke B i C pomaknuti za veličinu $u + du$.

Duljinske deformacije elementa, radijalna deformacija ε_r i cirkularna deformacija ε_φ po definiciji iznose:

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{\widehat{A_1D_1} - \widehat{AD}}{\widehat{AD}}. \quad (7.2)$$

Dalje je:

$$\overline{AB} = dr, \quad \overline{A_1B_1} = dr + (u + du) - u = dr + du$$

$$\widehat{AD} = r \cdot d\varphi, \quad \widehat{A_1D_1} = (r + u) \cdot d\varphi$$

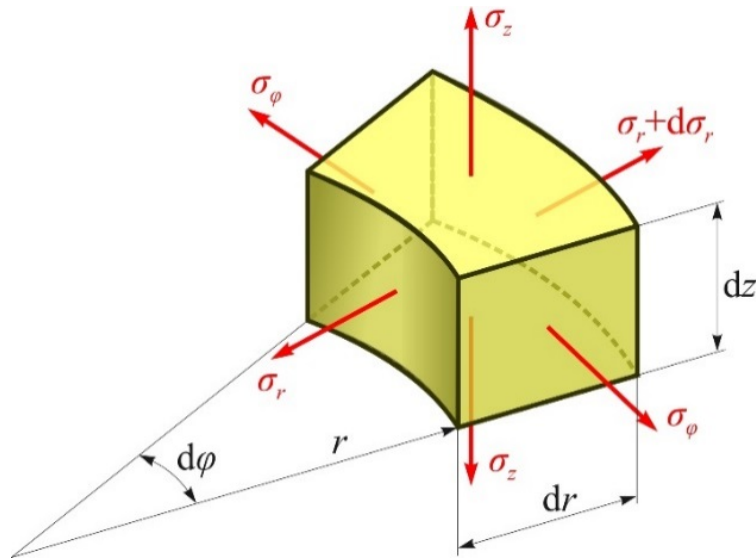
$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (7.3)$$

7.3. PRIMJENA HOOKEOVA ZAKONA

Na slici 7.7. prikazan je diferencijalni element s ucrtanim napreznanjima σ_r , σ_φ i σ_z .

Element se nalazi u troosnom stanju napreznanja kakvo vlada u stijenci debelostjene posude i **zatvorene** debelostjene cijevi. Ako je cijev **otvorena**, stanje napreznanja je dvoosno.

Naprezanja σ_r , σ_φ i σ_z ujedno su i glavna naprezanja.



Slika 7.7. Geometrijska analiza pomaka diferencijalnog elementa: a) početni nedeformirani oblik, b) usporedba konačnog deformiranog i početnog nedeformiranog elementa.

Jednadžbe Hookeova zakona za troosno stanje naprezanja glase:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\sigma_r - \nu \cdot (\sigma_\varphi + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\varphi)}{E}.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Hookeov zakon može se napisati u obliku u kojemu su naprezanja izražena preko deformacija, pri čemu σ_z smatramo poznatim jer se ono može izračunati iz uvjeta statičke ravnoteže odsječenog dijela posude/cijevi. Radijalno i cirkularno naprezanje jesu:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\varphi) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_\varphi + \nu \cdot \varepsilon_r) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z\end{aligned}\tag{7.5}$$

Uvrštavanjem izraza (7.3) u (7.5) dobije se:

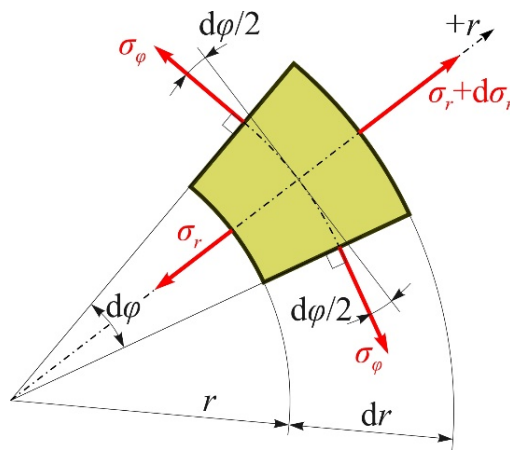
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu \cdot \frac{u}{r} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \nu \cdot \frac{du}{dr} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z\end{aligned}\tag{7.6}$$

7.4. UVJET RAVNOTEŽE I DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA RAVNOTEŽE ELEMENTA

Slika 7.8. prikazuje tlocrt diferencijalnog elementa s ucrtanim napreznjima σ_r i σ_φ . Element se nalazi u stanju statičke ravnoteže, pa uvjet ravnoteže glasi:

$$\sum F_r = 0:$$

$$-\sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz + (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \cdot dz - 2 \cdot \sigma_\varphi \cdot dr \cdot dz \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0. \quad (7.7)$$



Slika 7.8. Tlocrt diferencijalnog elementa s ucrtanim napreznjima

Nakon sređivanja, uz $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$ te zanemarivanje članova višeg reda, može se dobiti:

$$\sigma_r - \sigma_\varphi + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (7.8)$$

Dalje je iz (7.6):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \nu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \nu \cdot \frac{1}{r^2} \cdot u \right). \quad (7.9)$$

Uvrštavanjem izraza (7.6) i (7.9) u (7.8) te nakon sređivanja dobije se nova diferencijalna jednačba koja glasi:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (7.10)$$

Gornja jednačba može se prikazati u obliku prikladnom za integriranje:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (u \cdot r) \right] = 0. \quad (7.11)$$

Opće rješenje diferencijalne jednačbe ima oblik:

$$u(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}, \quad (7.12)$$

gdje su C_1 i C_2 konstante integracije koje se određuju iz rubnih uvjeta.

Dalje je:

$$\frac{u}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\frac{du}{r} = C_1 - \frac{C_2}{r^2},$$

a uvrštavanjem gornjih izraza u izraze (7.6) dobiju se izrazi za radijalno i cirkularno naprezanje koji glase:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[(1+\nu) \cdot C_1 - (1-\nu) \cdot C_2 \cdot \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[(1+\nu) \cdot C_1 + (1-\nu) \cdot C_2 \cdot \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z$$
(7.13)

Uvođenjem novih konstanta:

$$A = \frac{E}{1-\nu} \cdot C_1 + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_z$$

$$B = \frac{E}{1+\nu} \cdot C_2$$
(7.14)

izrazi za naprezanja (7.13) postaju:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}$$
(7.15)

Naprezanja su raspodijeljena po **zakonu kvadratne hiperbole**.

Zbrajanjem izraza u (7.15) može se dobiti izraz:

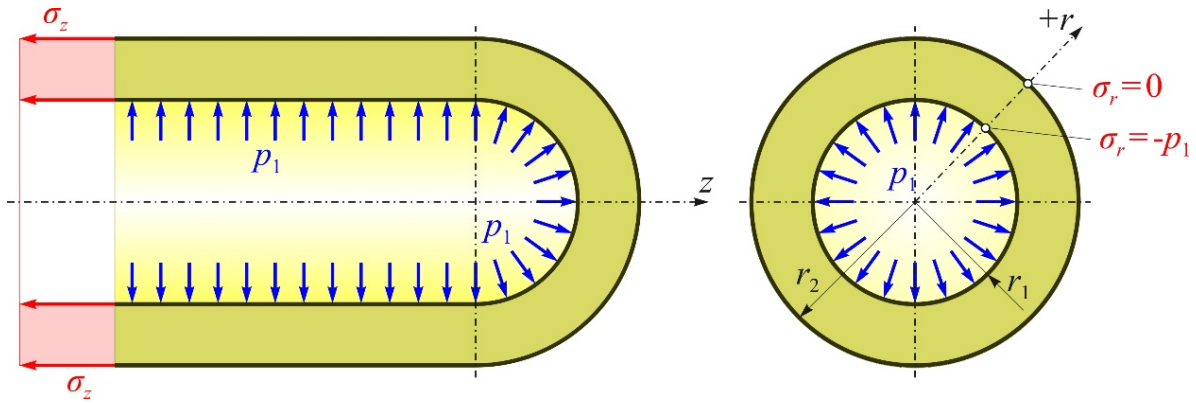
$$\sigma_r + \sigma_\varphi = 2A = \text{konst.}$$
(7.16)

Vrijedi, dakle, da je zbroj radijalnoga i cirkularnog naprezanja u bilo kojoj točki stijenke debele cijevi uvijek isti, tj. konstantan.

7.5. RASPODJELA NAPREZANJA I POMAKA U DEBELOSTJENOJ POSUDI I CIJEVI

7.5.1. Debelostjena posuda opterećena samo unutarnjim tlakom

Na slici 7.9.a prikazan je presjek cijevi meridionalnom ravninom, a na slici 7.9.b ravninom okomitom na uzdužnu os cijevi.



Slika 7.9. Debelostijena posuda opterećena unutarnjim tlakom: a) meridionalni presjek cijevi, b) poprečni presjek cijevi s prikazom rubnih uvjeta.

Rubni uvjeti potrebni za određivanje konstanta A i B u izrazima (7.15) glase:

1. za $r = r_1$ je $\sigma_r = -p_1$
2. za $r = r_2$ je $\sigma_r = 0$.

$$(7.17)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (7.17) u prvi izraz (7.15) dobije se:

$$A - \frac{B}{r_1^2} = -p_1, \quad A - \frac{B}{r_2^2} = 0, \quad (7.18)$$

pa rješavanjem sustava jednačaba (7.18) slijede izrazi za konstante A i B:

$$A = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = p_1 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (7.19)$$

Vraćanjem gornjih izraza za konstante A i B u izraze (7.15) dobiju se konačni izrazi za radijalno i cirkularno naprezanje:

$$\sigma_r = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right] \quad (7.20)$$

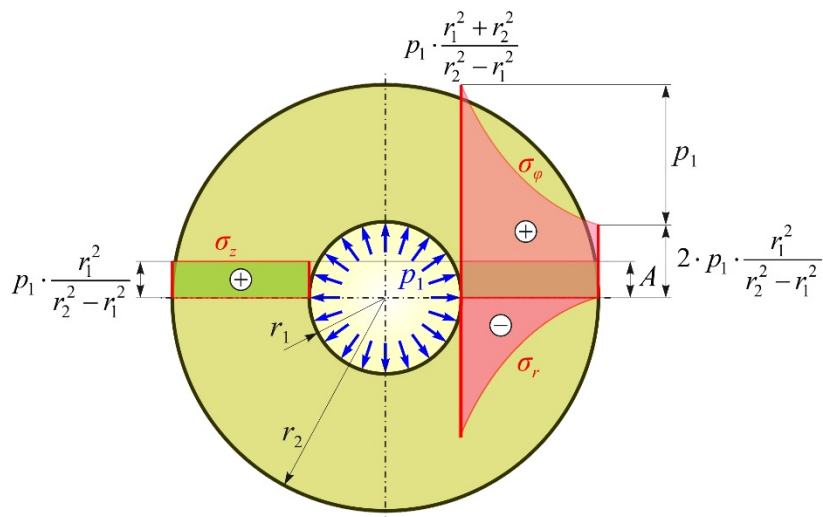
$$\sigma_\varphi = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right].$$

U slučajevima kada se radi o zatvorenoj debeloj cijevi i cilindričnoj posudi, u poprečnom presjeku pojavit će se još i aksijalna vlačna naprezanja σ_z . Ona su konstantna po poprečnom presjeku, a mogu se dobiti iz uvjeta statičke ravnoteže konačnog dijela cijevi na sljedeći način (slika 7.9.a):

$$\sum F_z = 0: \quad p_1 \cdot r_1^2 \cdot \pi - \sigma_z \cdot (r_2^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi) = 0, \quad (7.21)$$

$$\sigma_z = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (7.22)$$

Raspodjela normalnih naprezanja po debljini stijenke prikazana je na slici 7.10.



Slika 7.10. Raspodjela normalnih naprezanja po debljini stijenke

Izraz za radijalni pomak dobije se tako da se iz (7.14) konstante C_1 i C_2 izraze preko konstanta A i B :

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \cdot A - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z = \frac{1-\nu}{E} \cdot p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z$$

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E} \cdot B = \frac{1+\nu}{E} \cdot p_1 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$
(7.23)

pa uvrštavanjem tih konstanta u (7.12) slijedi izraz za radijalni pomak:

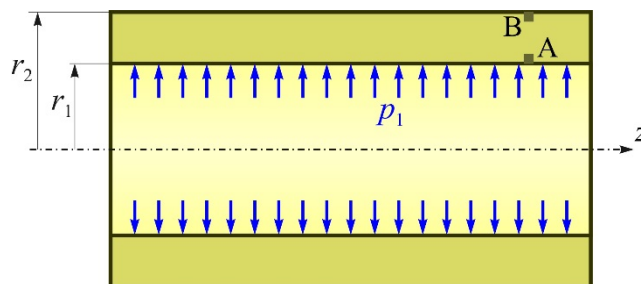
$$u(r) = \frac{p_1}{E} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[(1-\nu) \cdot r + (1+\nu) \cdot \frac{r_2^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z \cdot r$$
(7.24)

Primjer 7.1.

Otvorena deblostijena cijev opterećena je unutarnjim tlakom p_1 fluida koji struji u njoj (slika 7.11.). Valja izračunati raspodjele radijalnih i cirkularnih naprezanja po debljini stijenke cijevi te skicirati i kotirati odgovarajuće dijagrame raspodjele naprezanja.

Treba odrediti ekvivalentno naprezanje na diferencijalnim elementima u točki A koja leži na unutarnjoj stijenci cijevi i u točki B koja je na vanjskoj stijenci cijevi, po teoriji najveće distorzijske energije (HMH teorija).

Zadano je: $r_1 = 30 \text{ mm}$, $r_2 = 40 \text{ mm}$, $p_1 = 35 \text{ MPa}$.



Slika 7.11. Primjer 7.1.

Rješenje:

U ovom zadatku je prema (7.1):

$$\delta = 40 - 30 > \frac{1}{10} \cdot \frac{30 + 40}{2}, \quad \delta = 10 > 3,5,$$

pa se mogu koristiti svi navedeni izrazi izvedeni za normalna naprezanja i radijalne pomake, a koji vrijede za debelostjene posude i cijevi.

Radijalno i cirkularno naprezanje su prema (7.20):

$$\sigma_r = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{35 \cdot 30^2}{40^2 - 30^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{40}{r} \right)^2 \right] = 45 - \frac{72000}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{35 \cdot 30^2}{40^2 - 30^2} + \frac{35 \cdot 30^2 \cdot 40^2}{40^2 - 30^2} \cdot \frac{1}{r^2} = 45 + \frac{72000}{r^2}.$$

Za točku A, na unutarnjoj stijenci debele cijevi, radijalno i cirkularno naprezanje iznose:

$$\sigma_r = 45 - \frac{72000}{r^2} = 45 - \frac{72000}{30^2} = -35 \text{ MPa},$$

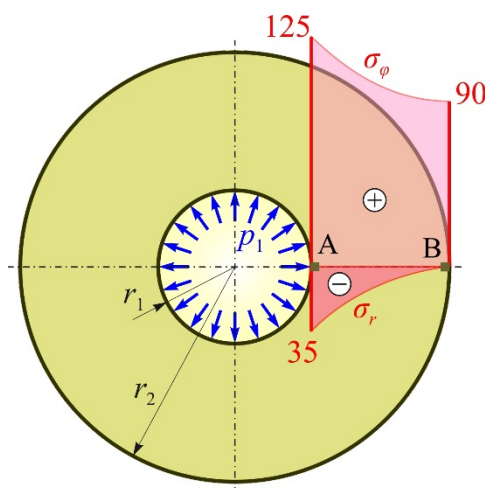
$$\sigma_\varphi = 45 + \frac{72000}{r^2} = 45 + \frac{72000}{30^2} = 125 \text{ MPa};$$

dok su za točku B, na vanjskoj stijenci, ta naprezanja:

$$\sigma_r = 45 - \frac{72000}{r^2} = 45 - \frac{72000}{40^2} = 0 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi = 45 + \frac{72000}{r^2} = 45 + \frac{72000}{40^2} = 90 \text{ MPa}.$$

Raspodjela radijalnog i cirkularnog naprezanja po debljini stijenke prikazana je na slici 7.12.



Slika 7.12. Primjer 7.1.

Prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji) ekvivalentno naprezanje iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}.$$

Za točku A je:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi = 125 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -35 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(125 - 0)^2 + (0 + 35)^2 + (-35 - 125)^2 \right]} = 145,7 \text{ MPa};$$

a za točku B je:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi = 90 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0 \text{ MPa},$$

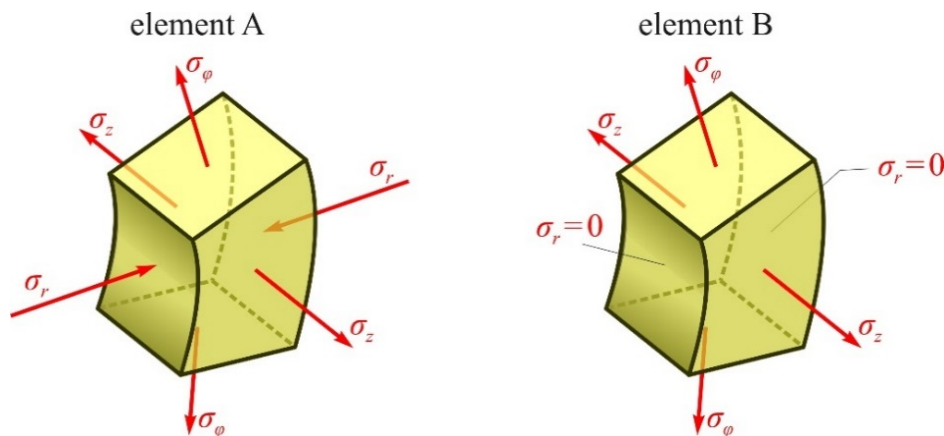
$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(90 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 90)^2 \right]} = 90 \text{ MPa}.$$

7.5.1.1. Dimenzioniranje debelostjene posude i cijevi opterećene samo unutarnjim tlakom

U inženjerskoj praksi često se javlja problem određivanja debljine stijenke δ , tj. potrebno je provesti dimenzioniranje prema nekoj od teorija čvrstoće.

U praksi se susreće debelostjena cijev kao element visokotlačnog cjevovoda ili pak spremnik za plin ili kapljevину koji su uskladišteni pod visokim tlakom. Obično je tada poznat unutarnji polumjer cijevi r_1 , a treba odrediti vanjski polumjer r_2 , odnosno debljinu stijenke δ da bude zadovoljen uvjet čvrstoće.

Na slici 7.13. prikazani su diferencijalni elementi u troosnom napregnutu stanju (*zatvorena* posuda /cijev): element A na unutarnjoj stijenci cijevi i element B na vanjskoj strani cijevi.



Slika 7.13. Diferencijalni elementi na unutarnjoj i vanjskoj strani cijevi

Prikazana naprezanja ujedno su i glavna naprezanja.

Za element A je:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_r;$$

dok je za element B:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = 0.$$

U slučaju *otvorene* debelostjene cijevi aksijalno naprezanje σ_z jednako je nuli.

Tada je na elementu A dvoosno napregnuto stanje s glavnim napreznjima:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_r.$$

Element B nalazi se u jednoosnom napregnutu stanju u kojem su glavna napreznja:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0.$$

Prema teoriji najvećih posmičnih napreznja ekvivalentno napreznje iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_r.$$

Kritičan element je element A na unutarnjoj strani cijevi, a uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{\text{ekv}} \leq \sigma_d.$$

Dalje je:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_\varphi - \sigma_r \leq \sigma_d,$$

$$p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - (-p_1) \leq \sigma_d,$$

odnosno:

$$2 \cdot p_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq \sigma_d.$$

Poznavajući unutarnji polumjer r_1 debele cijevi, koji je najčešće definiran konstrukcijskim zahtjevima, određuje se potrebni, minimalni vanjski polumjer r_2 debele cijevi, odnosno potrebna minimalna debljina stijenke cijevi δ_{min} :

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{\sigma_d}{\sigma_d - 2 \cdot p_1}},$$

$$\frac{r_2}{r_1} \geq \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \cdot \frac{p_1}{\sigma_d}}},$$

uz uvjet $2 \cdot p_1 / \sigma_d < 1$.

Prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji) ekvivalentno napreznje iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]},$$

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_3)^2 + (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 \right]}.$$

Kritičan je element A na unutarnjoj strani cijevi za koji razlike glavnih napreznja iznose:

$$\sigma_\varphi - \sigma_z = p_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\sigma_z - \sigma_r = p_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -2 \cdot p_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Dalje je:

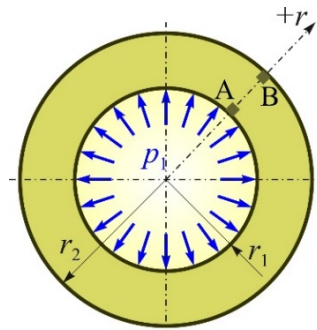
$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{3} \cdot p_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq \sigma_d,$$

$$r_2 \geq r_1 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_d}{\sigma_d - \sqrt{3} \cdot p_1}}.$$

Primjer 7.2.

Valja odrediti veličinu vanjskog polumjera r_2 debelostjene cijevi prema slici 7.14. u kojoj struji fluid pod tlakom p_1 . Poznat je unutarnji polumjer cijevi r_1 . Cijev je izrađena od čelika, a dopušteno naprezanje je zadano. Dimenzioniranje treba provesti prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja.

Zadano je: $r_1 = 35 \text{ mm}$, $p_1 = 25 \text{ MPa}$, $\sigma_d = 100 \text{ MPa}$.



Slika 7.14. Primjer 7.2.

Rješenje:

Ovdje se radi o otvorenoj debelostjenoj cijevi.

Kritičan element je element A na unutarnjoj strani cijevi (slika 7.15.), a uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{\text{ekv}} \leq \sigma_d.$$

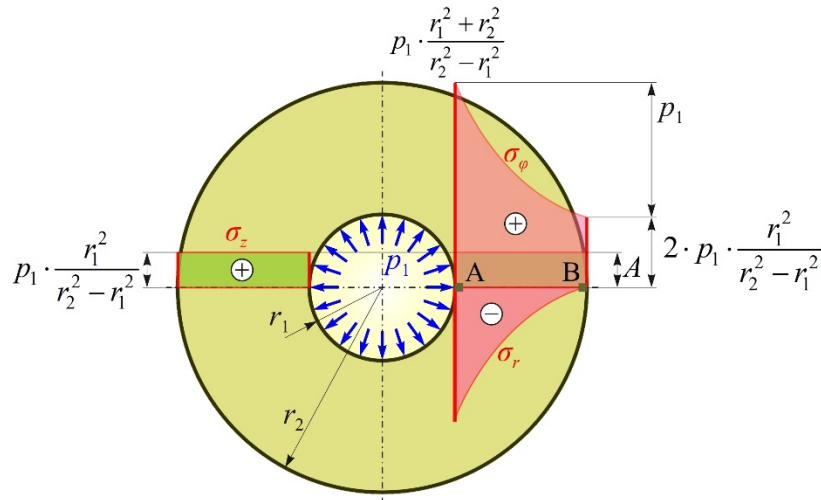
Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja ekvivalentno naprezanje iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_r.$$

Dalje je:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_3 = \sigma_r, \quad 2p_1 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq \sigma_d,$$

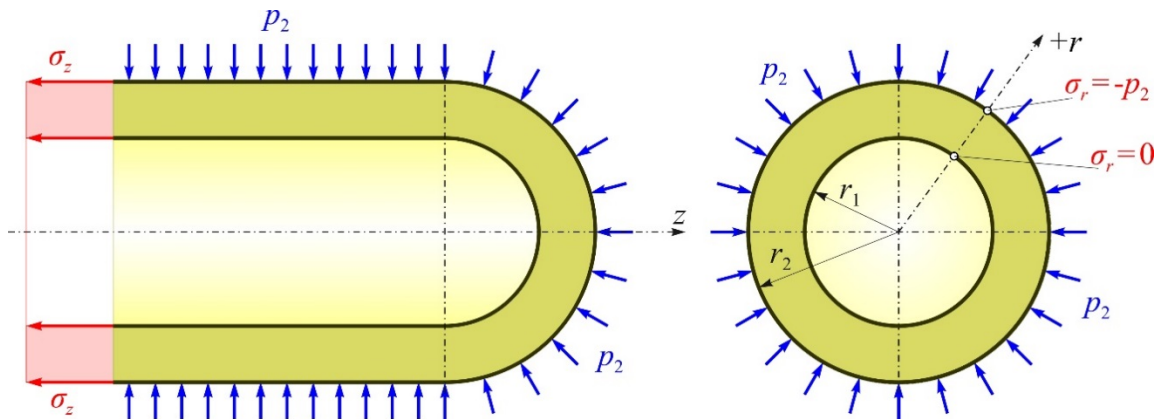
$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{\sigma_d}{\sigma_d - 2p_1}} = 35 \sqrt{\frac{100}{100 - 2 \cdot 25}} = 49,5 \text{ mm}.$$



Slika 7.15. *Primjer 7.2.*

7.5.2. Debelostjena posuda opterećena samo vanjskim tlakom

Na slici 7.16.a prikazan je presjek cijevi meridionalnom ravninom, a na slici 7.16.b ravninom okomitom na uzdužnu os cijevi.



Slika 7.16. *Debelostjena posuda opterećena vanjskim tlakom: a) meridionalni presjek cijevi, b) poprečni presjek cijevi s prikazom rubnih uvjeta.*

Rubni uvjeti potrebni za određivanje konstanta A i B u izrazima (7.15) glase:

1. za $r = r_1$ je $\sigma_r = 0$
2. za $r = r_2$ je $\sigma_r = -p_2$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (7.17) u prvi izraz (7.15) dobije se:

$$A - \frac{B}{r_1^2} = 0, \quad A - \frac{B}{r_2^2} = -p_2, \quad (7.26)$$

pa rješavanjem sustava jednačaba (7.18) slijede izrazi za konstante A i B:

$$A = -p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = -p_2 \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (7.27)$$

Vraćanjem gornjih izraza za konstante A i B u izraze (7.15) dobiju se konačni izrazi za radijalno i cirkularno naprezanje:

$$\sigma_r = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \quad (7.28)$$

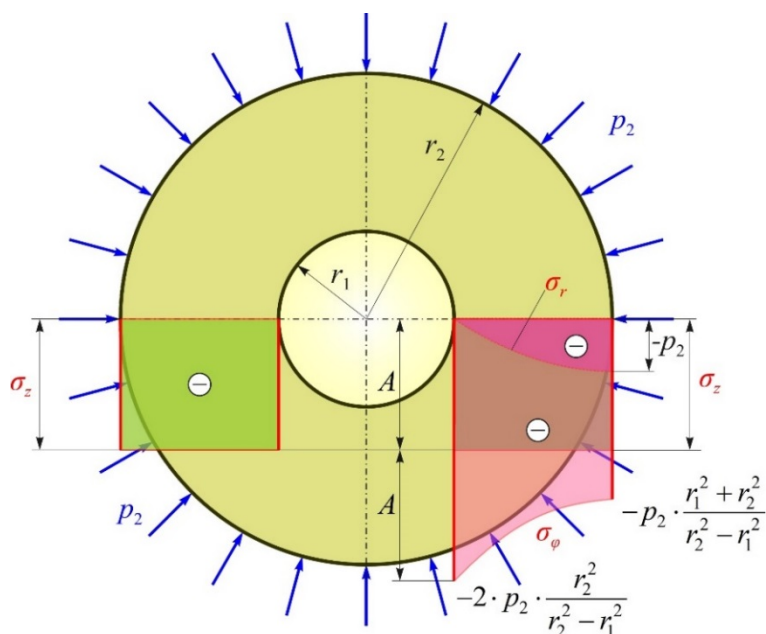
$$\sigma_\varphi = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right]$$

U slučajevima kada se radi o zatvorenoj debeloj cijevi i cilindričnoj posudi, u poprečnom presjeku pojavit će se još i aksijalna vlačna naprezanja σ_z . Ona su konstantna po poprečnom presjeku, a mogu se dobiti iz uvjeta statičke ravnoteže konačnog dijela cijevi na sljedeći način (slika 7.16.a):

$$\sum F_z = 0: -p_2 \cdot r_2^2 \cdot \pi - \sigma_z \cdot (r_2^2 \cdot \pi - r_1^2 \cdot \pi) = 0, \quad (7.29)$$

$$\sigma_z = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (7.30)$$

Raspodjela normalnih naprezanja po debljini stijenke prikazana je na slici 7.17.



Slika 7.17. Raspodjela normalnih naprezanja po debljini stijenke

Izraz za radijalni pomak dobije se tako da se iz (7.14) konstante C_1 i C_2 izraze preko konstanta A i B:

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \cdot A - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z = -\frac{1-\nu}{E} \cdot p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z \quad (7.31)$$

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E} \cdot B = -\frac{1+\nu}{E} \cdot p_2 \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

pa uvrštavanjem tih konstanta u (7.12) slijedi izraz za radijalni pomak:

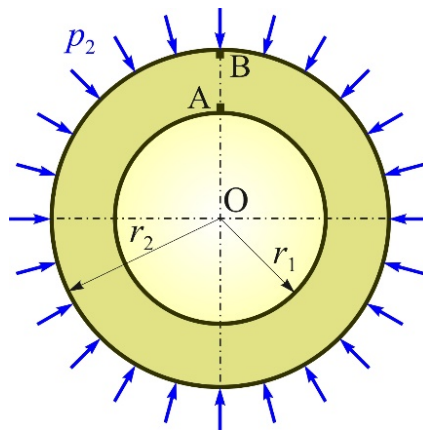
$$u(r) = -\frac{p_2}{E} \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[(1-\nu)r + (1+\nu)\frac{r_1^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \sigma_z r. \quad (7.32)$$

Primjer 7.3.

Otvorena debelostijena cijev opterećena je vanjskim tlakom p_2 (slika 7.18.). Valja izračunati raspodjele radijalnih i cirkularnih napreznja po debljini stijenke cijevi te skicirati i kotirati odgovarajuće dijagrame raspodjele napreznja.

Treba odrediti ekvivalentno napreznje na diferencijalnim elementima A i B po teoriji najveće distorzijske energije (HMH teorija).

Zadano je: $r_1 = 100 \text{ mm}$, $r_2 = 150 \text{ mm}$, $p_2 = 50 \text{ MPa}$.



Slika 7.18. Primjer 7.3.

Rješenje:

U ovom zadatku je prema (7.1):

$$\delta = 150 - 100 > \frac{1}{10} \cdot \frac{150 + 100}{2},$$

$$\delta = 50 > 12,5,$$

pa se mogu koristiti svi navedeni izrazi izvedeni za normalna napreznja i radijalne pomake, a koji vrijede za debelostijene posude i cijevi opterećene vanjskim tlakom.

Radijalno i cirkularno napreznje su prema (7.28):

$$\sigma_r = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] = -\frac{50 \cdot 150^2}{150^2 - 100^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{r} \right)^2 \right] = -90 + \frac{900000}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] = -\frac{50 \cdot 150^2}{150^2 - 100^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{100}{r} \right)^2 \right] = -90 - \frac{900000}{r^2}.$$

Za točku A, na unutarnjoj stijenci debele cijevi, radijalno i cirkularno napreznje iznose:

$$\sigma_r(100) = -90 + \frac{900000}{100^2} = 0 \text{ MPa},$$

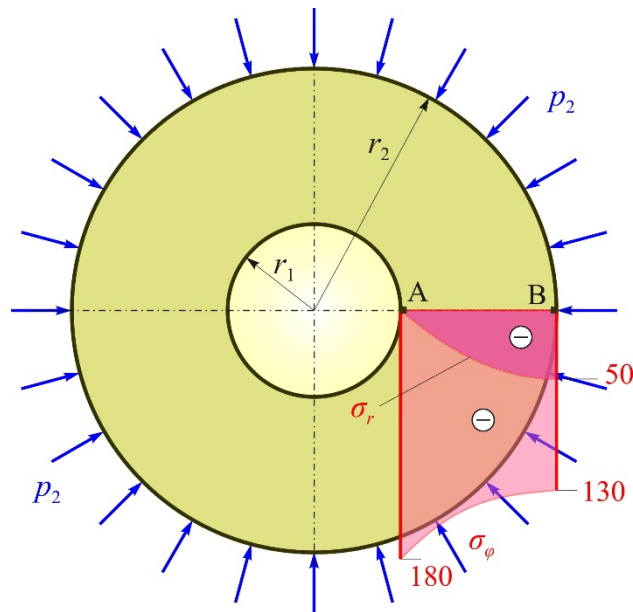
$$\sigma_\varphi(100) = -90 - \frac{900000}{100^2} = -180 \text{ MPa};$$

dok su za točku B, na vanjskoj stijenci, ova naprezanja:

$$\sigma_r(150) = -90 + \frac{900000}{150^2} = -50 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi(150) = -90 - \frac{900000}{150^2} = -130 \text{ MPa}.$$

Raspodjela radijalnog i cirkularnog naprezanja po debljini stijenke prikazana je na slici 7.19.



Slika 7.19. Primjer 7.3.

Prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji) ekvivalentno naprezanje iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Za točku A je:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_r = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi = -180 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(0-0)^2 + (0+180)^2 + (-180-0)^2]} = 180 \text{ MPa};$$

a za točku B je:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_r = -50 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi = -130 \text{ MPa},$$

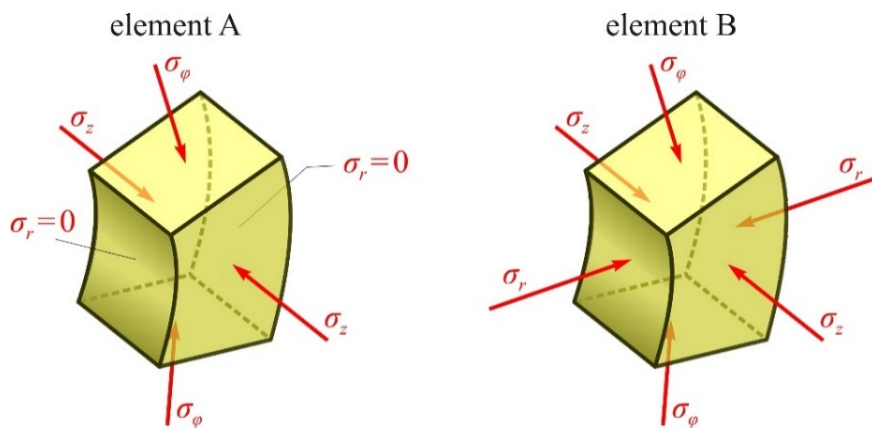
$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(0+50)^2 + (-50+130)^2 + (-130-0)^2]} = 113,6 \text{ MPa}.$$

7.5.2.1. Dimenzioniranje debelostjene posude i cijevi opterećene samo vanjskim tlakom

S problemom dimenzioniranja debelostjene cijevi opterećene vanjskim tlakom p_2 susrećemo se, primjerice, pri navlačenju jedne cijevi na drugu. Taj se problem susreće pri izradi topovskih cijevi i cijevi haubica. Unutarnja cijev je nakon navlačenja vanjske cijevi opterećena vanjskim tlakom.

Isti se problem javlja pri navlačenju glavine zupčanika na šuplju osovinu. Pri navlačenju ostvaruje se između glavine i osovine stezni spoj i osovina je opterećena kontaktnim tlakom izvana.

Na slici 7.20. prikazani su diferencijalni elementi u troosnom napregnutu stanju (*zatvorena* posuda/cijev): element A na unutarnjoj stijenci cijevi i element B na vanjskoj strani cijevi.



Slika 7.20. Diferencijalni elementi na unutarnjoj i vanjskoj strani cijevi

Prikazana naprezanja ujedno su i glavna naprezanja.

Za element A je:

$$\sigma_1 = \sigma_r = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi;$$

dok je za element B:

$$\sigma_1 = \sigma_r, \quad \sigma_2 = \sigma_z, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

U slučaju *otvorene* debelostjene cijevi aksijalno naprezanje σ_z jednako je nuli. Tada je na elementu A jednoosno stanje naprezanja s glavnim naprezanjima:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

Element B nalazi se u dvoosnom stanju naprezanja u kojem su glavna naprezanja:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_r, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi.$$

Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja ekvivalentno naprezanje iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r - \sigma_\varphi.$$

Za element A na unutarnjoj strani cijevi uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ekv} \leq \sigma_d.$$

Dalje je:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_r - \sigma_\varphi \leq \sigma_d,$$

$$0 - \left(-2 \cdot p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \leq \sigma_d,$$

odnosno:

$$2 \cdot p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq \sigma_d.$$

Poznavajući unutarnji polumjer r_1 debele cijevi, koji je najčešće definiran konstrukcijskim zahtjevima, određuje se potrebni, minimalni vanjski polumjer r_2 debele cijevi, odnosno potrebna minimalna debljina stijenke cijevi δ_{\min} :

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{\sigma_d}{\sigma_d - 2p_2}}.$$

Za element B na vanjskoj strani cijevi uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r - \sigma_\varphi \leq \sigma_d$$

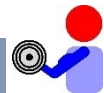
$$-p_2 - \left(-p_2 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \leq \sigma_d$$

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{2p_2 + \sigma_d}{\sigma_d}}.$$

Prema teoriji najveće distorzijske energije može se dobiti izraz za vanjski polumjer cijevi r_2 :

$$r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{\sigma_d}{\sigma_d - \sqrt{3}p_2}}.$$

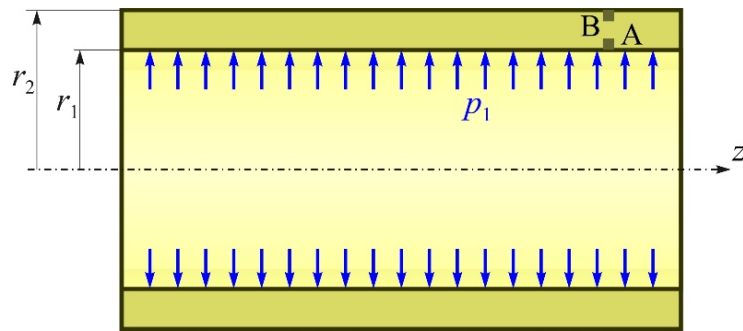
ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 7.1. Otvorena debelostjena cijev opterećena je unutarnjim tlakom p_1 fluida koji struji u njoj (slika Z.7.1.). Valja izračunati raspodjele radijalnih i cirkularnih naprezanja po debljini stijenke cijevi te skicirati i kotirati odgovarajuće dijagrame raspodjele naprezanja.

Treba odrediti radijalne pomake točke A koja leži na unutarnjoj stijenci cijevi i točke B koja je na vanjskoj stijenci cijevi.

Zadano: $r_1 = 60 \text{ mm}$, $r_2 = 80 \text{ mm}$, $p_1 = 45 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.

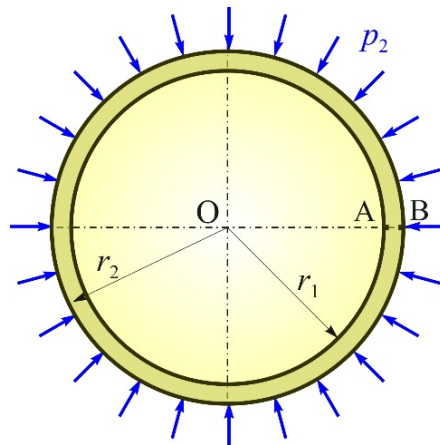


Slika Z.7.1. Zadatak 7.1.

Zadatak 7.2. Zatvorena debelostjena cijev opterećena je vanjskim tlakom p_2 (slika Z.7.2.). Valja izračunati raspodjele radijalnih i cirkularnih naprezanja po debljini stijenke cijevi te skicirati i kotirati odgovarajuće dijagrame raspodjele naprezanja.

Treba odrediti radijalne pomake točke A koja leži na unutarnjoj stijenci cijevi i točke B koja je na vanjskoj stijenci cijevi.

Zadano je: $r_1 = 120 \text{ mm}$, $r_2 = 140 \text{ mm}$, $p_2 = 35 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.

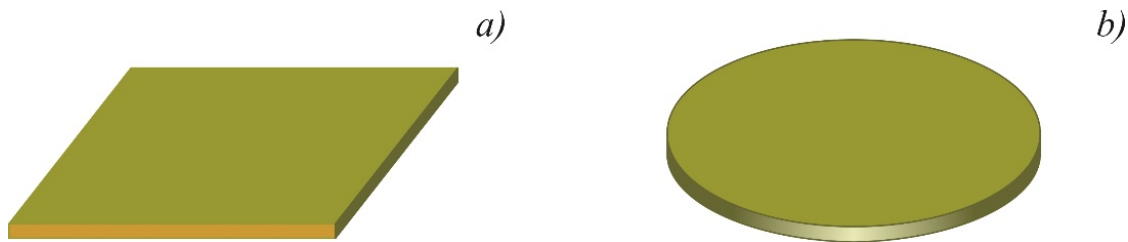


Slika Z.7.2. Zadatak 7.2.

8. SAVIJANJE TANKIH KRUŽNIH PLOČA

Ploča je plosnato tijelo koje je ograničeno dvjema plohama čija je međusobna udaljenost h . Debljina h je mala u usporedbi s ostalim dimenzijama ploče.

Ploče mogu biti različitih oblika, a najčešće su pravokutnog (slika 8.1.a) ili kružnog oblika (slika 8.1.b).



Slika 8.1. Tanke ploče: a) pravokutna ploča, b) kružna ploča.

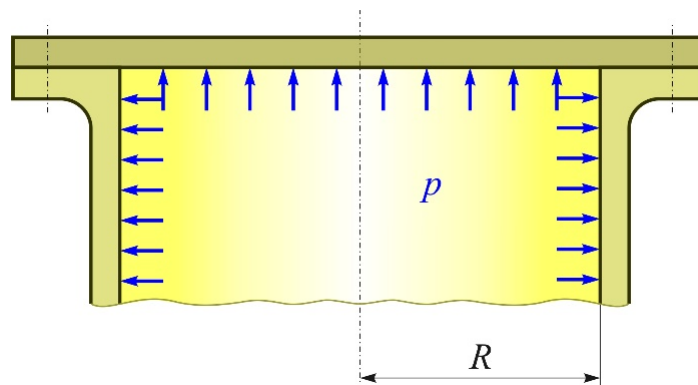
Srednja ploha je ploha koja je jednako udaljena od vanjskih površina. Kod ploča je srednja ploha uvijek ravna, pa se naziva **srednja ravnina**.

U ovom poglavlju razmatrat će se savijanje tankih kružnih ploča, tj. onih kojima je omjer debljine h i polumjera R :

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{10}. \quad (8.1)$$

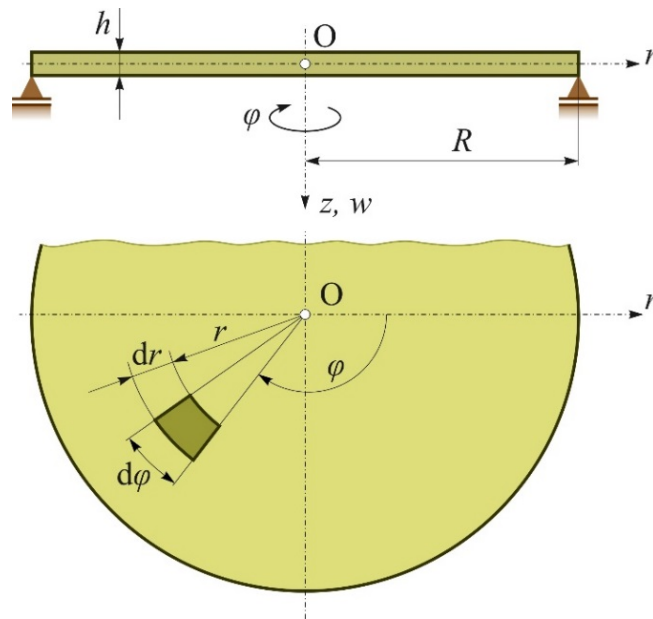
8.1. GEOMETRIJA I KOORDINATNI SUSTAV

U strojarstvu se često susreću kružni elementi u obliku kružnih ili prstenastih ploča. Kao primjer mogu poslužiti ravna dna posuda, okrugli poklopci (slika 8.2.), prirubnice itd. Ti su dijelovi najčešće opterećeni osnosimetrično.



Slika 8.2. Poklopac u obliku tanke kružne ploče

Pri analizi savijanja kružnih ploča koristi se cilindrični koordinatni sustav u kojem je os z usmjerena prema dolje slično kao i pri savijanju štapova (slika 8.3).



Slika 8.3. Koordinatni sustav tanke kružne ploče

8.2. OGRANIČENJA OBLIKA, POMAKA I OPTEREĆENJA

Formule izvedene u ovom poglavlju vrijede uz sljedeća ograničenja:

1. Ploča je tanka. Najveća debljina ploče određena je izrazom $\frac{h}{R} \leq \frac{1}{10}$.
2. Progibi ploče su mali, tj. $\frac{w_{\max}}{h} \leq \frac{1}{5}$.
3. Ploča je osno simetrična, osnosimetrično opterećena i učvršćena.

Treće ograničenje uvjetuje da sve geometrijske i statičke veličine ovise o koordinati r , poneke ovise o koordinati z , a nijedna ne ovisi o koordinati φ .

8.3. KOMPONENTE UNUTARNJIH SILA U PLOČI

Budući da se razmatraju samo osnosimetrične ploče koje su osnosimetrično opterećene i učvršćene, radijalni presjeci su presjeci simetrije, pa su u njima posmična naprezanja jednaka nuli:

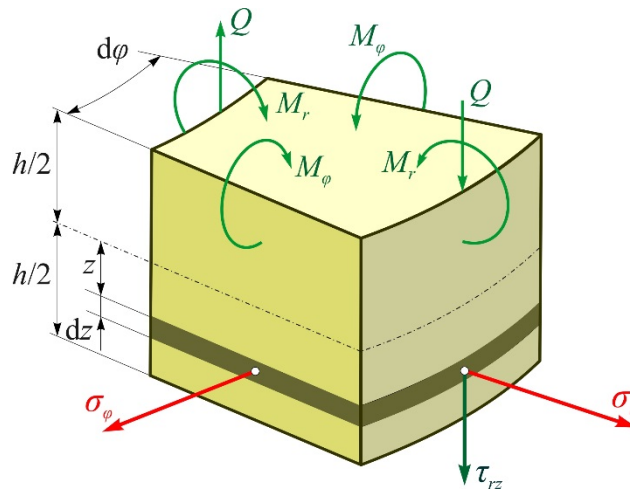
$$\tau_{\varphi r} = \tau_{\varphi z} = 0. \quad (8.2)$$

Matrica naprezanja je simetrična, pa je također:

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0. \quad (8.3)$$

Na diferencijalnom elementu ploče preostaju samo komponente naprezanja σ_r , σ_φ i τ_{rz} (slika 8.4.).

Komponente unutarnjih sila u teoriji ploča i ljuski uvijek se odnose na jedinicu duljine.



Slika 8.4. Komponente naprezanja na diferencijalnom elementu tanke kružne ploče

Poprečna sila dana je izrazom:

$$Q = \frac{1}{r \cdot d\varphi} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz . \quad (8.4)$$

Integral na desnoj strani označava poprečnu silu koja se izražava u njutnima (N) i koja djeluje na duljinu $r \cdot d\varphi$. Ako integral podijelimo s duljinom $r \cdot d\varphi$, dobit ćemo poprečnu silu koja se odnosi na jedinicu duljine i izražava u njutnima po metru (N/m).

Budući da se integriranje provodi po koordinati z , veličina $r \cdot d\varphi$ pri tome je konstantna i smije se izvući ispred integrala pa je:

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot dz . \quad (8.5)$$

Na sličan način mogu se dobiti izrazi za radijalni M_r i cirkularni M_φ moment savijanja:

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz , \quad (8.6)$$

$$M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi \cdot z \cdot dz . \quad (8.7)$$

Može se pokazati da su radijalna σ_r i cirkularna σ_φ komponenta naprezanja raspodijeljene linearno po debljini ploče:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) \cdot z , \quad (8.8)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right) \cdot z . \quad (8.9)$$

Dalje je:

$$M_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz, \quad (8.10)$$

$$M_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz, \quad (8.11)$$

odnosno nakon integriranja:

$$M_r = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right), \quad (8.12)$$

$$M_\varphi = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right). \quad (8.13)$$

Veličina $h^3 / 12$ je moment tromosti jedinične širine poprečnog presjeka.

Ako se uvede oznaka

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \quad (8.14)$$

za fleksijsku krutost ploče, izrazi (8.12) i (8.13) za radijalni M_r i cirkularni M_φ moment savijanja postaju:

$$M_r = D \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right), \quad (8.15)$$

$$M_\varphi = D \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right). \quad (8.16)$$

8.4. PRETPOSTAVKE O DEFORMIRANJU I RASPODJELI NAPREZANJA

Analiza napreznja i deformacija provodi se uz ove pretpostavke:

1. Pri deformiranju normale na srednju ravninu ostaju ravne i okomite na **elastičnu plohu**. Elastična ploha $w = w(r)$ je deformirana srednja ravnina.
2. Elastična ploha ujedno je i neutralna ploha, tj. u njoj su napreznja σ_r i σ_φ jednaka nuli.
3. U ploči vlada približno ravninsko stanje napreznja. Napreznje σ_z zanemarivo je malo u usporedbi s napreznjima σ_r i σ_φ .

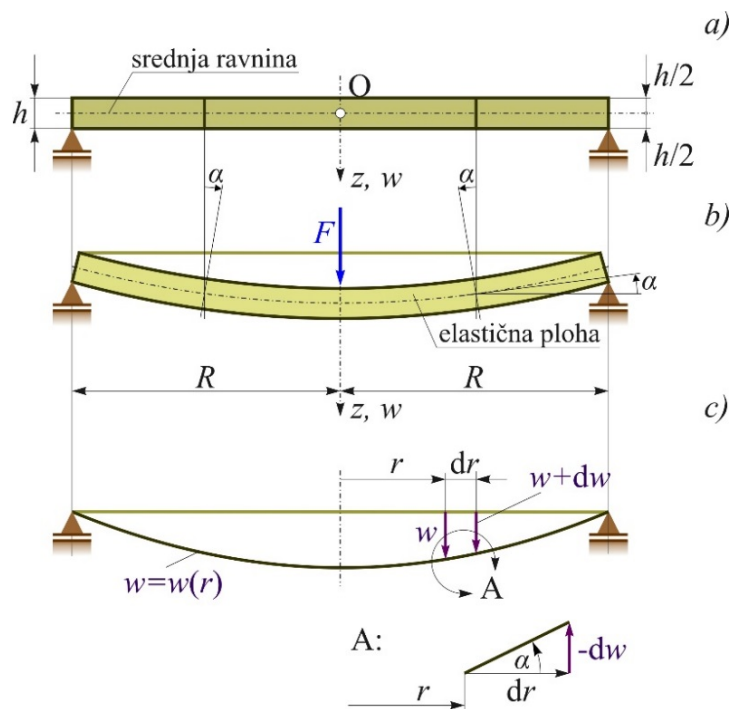
Prva je pretpostavka ekvivalentna pretpostavci o ravnim presjecima koju smo uveli pri razmatranju savijanja štapova. Ona je u cijelosti ispunjena pri čistom savijanju. Ako osim momenta savijanja djeluje i poprečna sila, ta je pretpostavka samo približno ispunjena, i to bolje što je debljina ploče manja. Kako razmatramo samo tanke ploče, odstupanje od te pretpostavke neznatno utječe na rezultate.

Druga pretpostavka ne može biti u cijelosti ispunjena jer nije moguće ravninu pretvoriti u dvostruko zakrivljenu plohu bez pojave naprezanja. Međutim, ako je ploča tanka i ako su progibi mali, odstupanja od te pretpostavke također su zanemariva.

Treća pretpostavka također nije u potpunosti ispunjena. Naime, ploče služe najčešće kao poklopci na koje djeluje tlak p . U tankostjenim posudama tlak rijetko prelazi 1 ili 2 MPa, a često je i manji. S druge strane, konstrukcije se dimenzioniraju tako da su maksimalna naprezanja blizu dopuštenih. Dopuštena naprezanja su u čeličnim posudama oko 150 MPa ili veća. Stoga zanemarivanje σ_z vrlo malo utječe na točnost rezultata.

8.5. GEOMETRIJSKA ANALIZA

Srednja ploha ploče (slika 8.5.a) pod opterećenjem prelazi u slabo zakrivljenu osnosimetričnu elastičnu plohu (slika 8.5.b). Ta je ploha zapravo rotacijski paraboloid zadan izrazom $w = w(r)$ (slika 8.5.c).

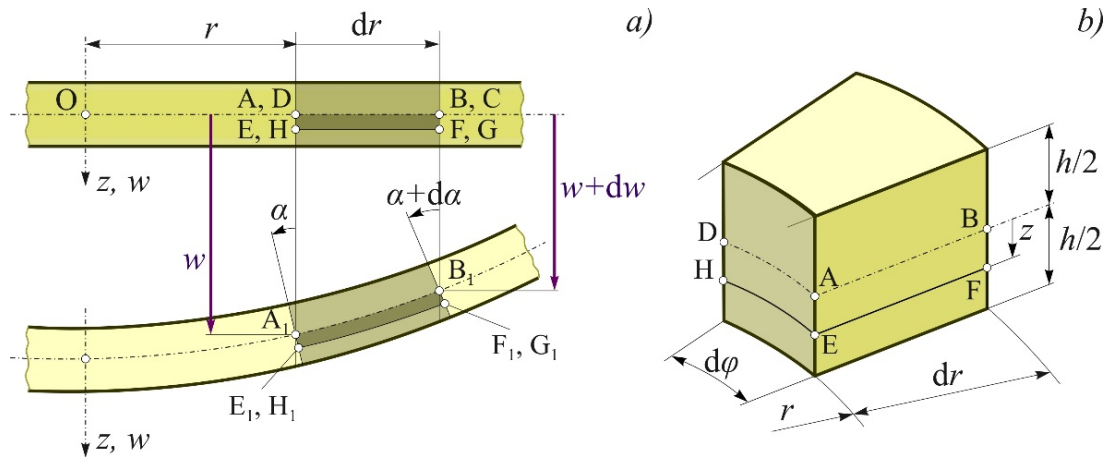


Slika 8.5. Tanka kružna ploča: a) srednja ravnina, b) elastična ploha, c) veza kuta tangente na elastičnu plohu i progiba.

Ako na udaljenosti r od osi z progib iznosi w a nagib α , na udaljenosti $r + dr$ progib je jednak $w + dw$ a nagib $\alpha + d\alpha$, vrijedi jednakost:

$$\alpha = -\frac{dw}{dr}. \quad (8.17)$$

Na slici 8.6.a prikazan je dio tanke kružne ploče u početnom nedeformiranom i u deformiranom obliku. Na ploči je označen ortogonalni element duljine dr i širine $r \cdot d\varphi$. Početni oblik elementa prikazan je aksonometrijski na slici 8.6.b.



Slika 8.6. Geometrijska analiza: a) nedeformirani i deformirani dio tanke kružne ploče, b) aksonometrijski prikaz početnog oblika ortogonalnog elementa.

Razmatra se deformacija diferencijalnoga radijalnog elementa $EF = dr$ i diferencijalnoga cirkularnog elementa $EH = r \cdot d\varphi$.

Ti se elementi nalaze na udaljenosti z od srednje ravnine.

Deformacije tih elemenata iznose:

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{E_1F_1} - \overline{EF}}{\overline{EF}}, \quad (8.18)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\overline{E_1H_1} - \overline{EH}}{\overline{EH}}. \quad (8.19)$$

Točke A i D spuštaju se paralelno s osi z za iznos w , a točka B za iznos $w + dw$. Točke E i H spuštaju se za isti iznos kao i točke A i D, ali se one zbog zakreta normale još pomiču radijalno za iznos $z \cdot d\alpha$.

Točka F spušta se za isti iznos kao i točka B, ali se pomiče radijalno za iznos $z \cdot (\alpha + d\alpha)$.

Duljine elemenata EF i EH nakon deformiranja iznose:

$$\begin{aligned} \overline{E_1F_1} &= dr + z \cdot d\alpha \\ \overline{E_1H_1} &= (r + z \cdot \alpha) \cdot d\varphi \end{aligned} \quad (8.20)$$

Naime, udaljenost točaka E i H od osi z prije deformiranja bila je r , a nakon deformiranja $r + z \cdot \alpha$.

Dalje je:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= z \cdot \frac{d\alpha}{dr} \\ \varepsilon_\varphi &= z \cdot \frac{\alpha}{r} \end{aligned} \quad (8.21)$$

8.6. PRIMJENA HOOKEOVA ZAKONA

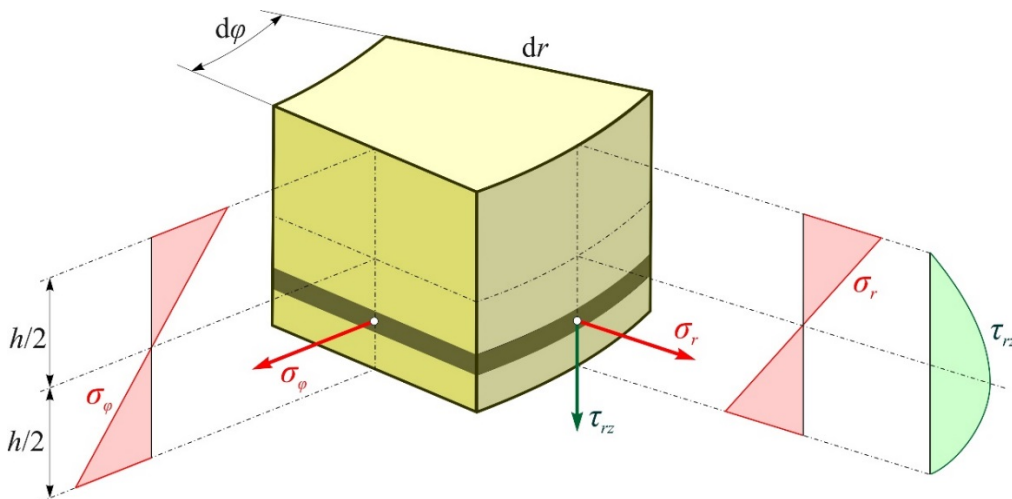
Hookeov zakon za ravninsko stanje naprezanja glasi:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\varphi) \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_\varphi + \nu \cdot \varepsilon_r)\end{aligned}\quad (8.22)$$

Uvrštavanjem izraza (8.21) u (8.22) dobije se:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) \cdot z, \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right) \cdot z\end{aligned}\quad (8.23)$$

Iz izraza (8.23) da se zaključiti kako je raspodjela radijalnih i cirkularnih naprezanja po debljini ploče linearna (slika 8.7.).



Slika 8.7. Raspodjela radijalnih, cirkularnih i posmičnih naprezanja po debljini tanke kružne ploče

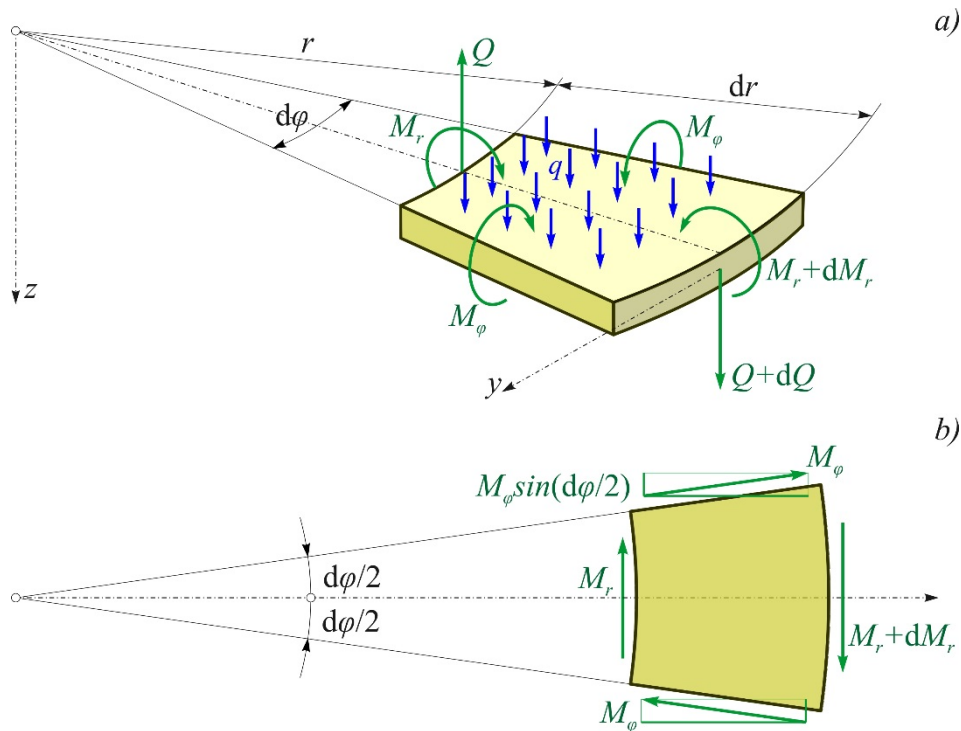
8.7. PRIMJENA UVJETA RAVNOTEŽE

Uvjeti ravnoteže neće biti postavljeni pomoću naprezanja, nego pomoću komponenta unutarnjih sila. Posmično naprezanje τ_{rz} kao rezultantu ima poprečnu silu Q , dok se naprezanja σ_r i σ_φ reduciraju na momente M_r i M_φ .

Uvjeti ravnoteže postavljeni za diferencijalni element na slici 8.8. glase:

$$\sum F_z = -Q \cdot r \cdot d\varphi + (Q + dQ) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = 0, \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned}\sum M_y &= -M_r \cdot r \cdot d\varphi + (M_r + dM_r) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - \\ &\quad - 2 \cdot M_\varphi \cdot dr \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - Q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr + q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot \frac{dr}{2} = 0.\end{aligned}\quad (8.25)$$



Slika 8.8. Diferencijalni element s prikazom vanjskog opterećenja i unutarnjih sila

Ako se uzme u obzir da je

$$\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = \frac{d\varphi}{2},$$

pa zatim srede gornji izrazi (8.24) i (8.25) i pri tome zanemare male veličine višeg reda, dobije se:

$$Q + dQ + q \cdot r = 0, \quad (8.26)$$

$$M_\varphi - M_r - \frac{dM_r}{dr} = -Q \cdot r. \quad (8.27)$$

Izrazi (8.26) i (8.27) mogu se napisati u obliku:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot Q) = -q, \quad (8.28)$$

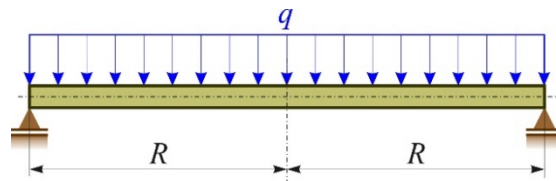
$$\frac{d}{dr}(r \cdot M_r) - M_\varphi = Q \cdot r. \quad (8.29)$$

8.8. DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA SAVIJANJA TANKE KRUŽNE PLOČE

Sustav jednadžaba (8.15), (8.16), (8.28) i (8.29) može se sređivanjem svesti na diferencijalnu jednadžbu oblika:

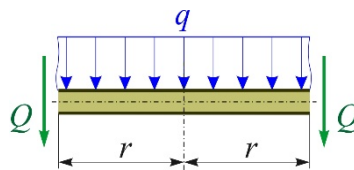
$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(\alpha \cdot r) \right] = \frac{Q}{D}, \quad (8.30)$$

u kojoj su dvije nepoznanice α i Q .



Slika 8.9. Tanka kružna ploča opterećena jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem po površini ploče

Tako, na primjer, za tanku kružnu ploču zadanu i opterećenu prema slici 8.9. poprečna sila Q može se odrediti razmatranjem ravnoteže isječenog elementa ploče polujmera r (slika 8.10.):



Slika 8.10. Isječeni dio ploče s kontinuiranim opterećenjem i poprečnom silom po obodu ploče u proizvoljnom presjeku na udaljenosti r od sredine ploče

$$\sum F_z = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot Q + \int_0^r q(r) \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr = 0. \quad (8.31)$$

Dalje je:

$$Q = -\frac{1}{r} \cdot \int_0^r q(r) \cdot r \cdot dr. \quad (8.32)$$

Za konstantno kontinuirano opterećenje izraz (8.32) postaje:

$$Q = -\frac{q \cdot r}{2}. \quad (8.33)$$

Opće rješenje diferencijalne jednačbe (8.30) ima oblik:

$$\alpha = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{D \cdot r} \int [r \cdot \int Q \cdot dr] \cdot dr. \quad (8.34)$$

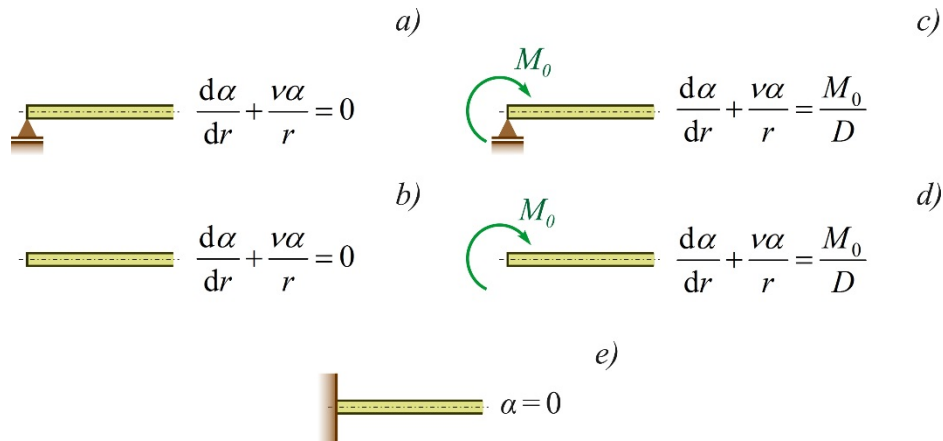
Konstante integracije određuju se na temelju rubnih uvjeta (slika 8.11).

Ako je ploča puna, onda je u sredini ploče $\alpha = 0$, što uvjetuje da je $C_2 = 0$.

Kod prstenastih ploča postoje dva ruba, pa se na temelju dvaju rubnih uvjeta mogu odrediti dvije konstante integracije C_1 i C_2 .

Na slici 8.11. prikazano je pet mogućih rubnih uvjeta.

Rubovi ploče mogu biti ukliješteni (slika 8.11.e), zglobno oslonjeni ili slobodni. Posljednja dva mogu biti opterećena rubnim momentom M_0 (slika 8.11.c i d) ili mogu biti bez opterećenja (slika 8.11.a i b).



Slika 8.11. Rubni uvjeti: a) ploča zglobno oslonjena na rubu, b) ploča slobodna od veza na rubu, c) ploča zglobno oslonjena i opterećena po rubu radijalnim momentom, d) ploča slobodna od veza po rubu i opterećena radijalnim momentom, e) ploča uklještena po rubu.

Za rub prema slikama 8.11.a i b rubni uvjet glasi:

$$\left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) = 0. \quad (8.35)$$

Ako je rub slobodan ili zglobno oslonjen i opterećen (slike 8.11c i d), rubni uvjet je:

$$\left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) = \frac{M_0}{D}. \quad (8.36)$$

Za rub uklješten prema slici 8.11.e rubni uvjet glasi:

$$\alpha = 0. \quad (8.37)$$

Kada se pomoću rubnih uvjeta odrede konstante integracije, može se dobiti konačni izraz $\alpha = \alpha(r)$.

Radijalni i cirkularni moment savijanja onda se mogu dobiti prema izrazima (8.15) i (8.16):

$$M_r = D \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right), \quad M_\varphi = D \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right).$$

Progib se može dobiti prema:

$$w = -\int \alpha(r) \cdot dr + C_3, \quad (8.38)$$

gdje se C_3 također određuje iz rubnih uvjeta.

Maksimalna radijalna i cirkularna normalna naprezanja javljaju se na gornjoj odnosno na donjoj površini (slika 8.7.) i iznose:

$$\sigma_{r \max} = \pm \frac{6 \cdot M_r}{h^2}, \quad (8.39)$$

$$\sigma_{\varphi \max} = \pm \frac{6 \cdot M_\varphi}{h^2}$$

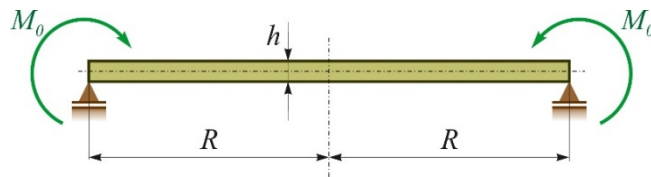
Primjer 8.1.

Tanka kružna ploča polumjera R i debljine h oslonjena je zglobno duž ruba i opterećena momentom M_0 prema slici 8.12.

Potrebno je odrediti:

- raspodjelu radijalnog i cirkularnog momenata savijanja M_r i M_φ
- najveći progib w_{\max} i najveći nagib α_{\max}
- najveće radijalno naprezanje σ_r i najveće cirkularno naprezanje σ_φ .

Zadano je: $R = 200$ mm, $h = 10$ mm, $M_0 = 2000$ Nm/m, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$.



Slika 8.12. Primjer 8.1.

Rješenje:

Ispunjen je uvjet (8.1) jer je

$$\frac{h}{R} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \leq \frac{1}{10}.$$

Budući da na ploču ne djeluju koncentrirane sile ni kontinuirano opterećenje, poprečna sila Q jednaka je nuli pa diferencijalna jednačba savijanja (8.30) glasi:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\alpha \cdot r) \right] = 0.$$

Do općeg rješenja diferencijalne jednačbe dolazi se integriranjem kako slijedi:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\alpha \cdot r) = C_1, \quad \frac{d}{dr} (\alpha \cdot r) = C_1 \cdot r,$$

$$\alpha \cdot r = C_1 \cdot \frac{r^2}{2} + C_2, \quad \alpha = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}.$$

Kako se radi o punoj ploči, bit će $C_2 = 0$. Drugi rubni uvjet za $r = R$ prema (8.36) glasi:

$$\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} = \frac{M_0}{D}.$$

Dalje je:

$$\alpha = C_1 \cdot r, \quad \frac{d\alpha}{dr} = C_1, \quad \frac{\alpha}{r} = C_1,$$

$$C_1 + \nu \cdot C_1 = \frac{M_0}{D}, \quad C_1 = \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)}.$$

Konačni izraz za funkciju nagiba sada glasi:

$$\alpha = \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} \cdot r.$$

Dalje je:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)}, \quad \frac{\alpha}{r} = \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)},$$

pa se izrazi za radijalni i cirkularni moment savijanja dobiju prema (8.15) i (8.16) i glase:

$$M_r = D \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) = D \cdot \left[\frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} + \nu \cdot \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} \right] = M_0,$$

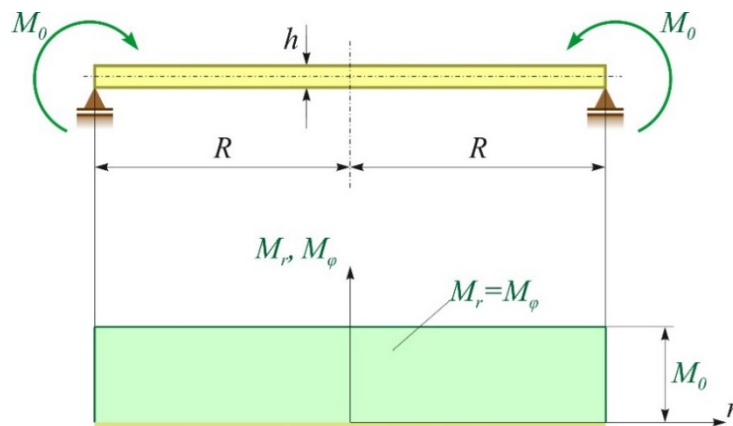
$$M_\varphi = D \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right) = D \cdot \left[\frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} + \nu \cdot \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} \right] = M_0.$$

Momenti savijanja konstantni su po cijeloj ploči, a njihov je dijagram prikazan na slici 8.13.

Izraz za progib dobije se prema (8.38) kako slijedi:

$$w = - \int \alpha(r) \, dr,$$

$$w = - \int \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} \cdot r \cdot dr = - \frac{M_0}{D \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{r^2}{2} + C_3.$$



Slika 8.13. Primjer 8.1.

Konstanta integracije C_3 može se dobiti iz rubnog uvjeta: za $r = R$, $w = 0$, što daje:

$$C_3 = \frac{M_0 \cdot R^2}{2 \cdot D \cdot (1 + \nu)},$$

pa je konačni izraz za progibnu funkciju:

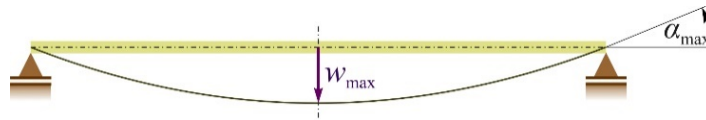
$$w = \frac{M_0}{2 \cdot D \cdot (1 + \nu)} \cdot (R^2 - r^2).$$

Najveći je progib u sredini ploče (slika 8.14.), tj. za $r = 0$, i iznosi:

$$w_{\max} = \frac{M_o}{2 \cdot D \cdot (1 + \nu)} \cdot R^2,$$

te uz (8.14):

$$w_{\max} = \frac{6 \cdot (1 - \nu)}{E \cdot h^3} \cdot M_o \cdot R^2.$$



Slika 8.14. *Primjer 8.1.*

Najveći nagib javlja se na rubu, tj. za $r = R$, i iznosi:

$$\alpha_{\max} = \frac{M_o}{D \cdot (1 + \nu)} \cdot R = \frac{12 \cdot (1 - \nu)}{E \cdot h^3} \cdot M_o \cdot R.$$

Najveće radijalno i cirkularno normalno naprezanje javljaju se na gornjoj odnosno na donjoj površini i iznose:

$$\sigma_{r \max} = \pm \frac{6 \cdot M_r}{h^2} = \pm \frac{6 \cdot M_o}{h^2}, \quad \sigma_{\varphi \max} = \pm \frac{6 \cdot M_{\varphi}}{h^2} = \pm \frac{6 \cdot M_o}{h^2}.$$

Za zadane vrijednosti tražene veličine iznose:

$$M_r = M_{\varphi} = M_o = 2000 \text{ Nm/m},$$

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{\varphi \max} = \pm \frac{6 \cdot 2000}{0,01^2} = \pm 120000000 \text{ Pa} = \pm 120 \text{ MPa},$$

$$w_{\max} = \frac{6 \cdot (1 - \nu)}{E \cdot h^3} \cdot M_o \cdot R^2 = \frac{6 \cdot (1 - 0,3)}{210 \cdot 10^3 \cdot 10^3} \cdot 2000 \cdot 200^2 = 1,6 \text{ mm},$$

$$\alpha_{\max} = \frac{12 \cdot (1 - \nu)}{E \cdot h^3} \cdot M_o \cdot R = \frac{12 \cdot (1 - 0,3)}{210 \cdot 10^3 \cdot 10^3} \cdot 2000 \cdot 200 = 0,016 \text{ rad}.$$

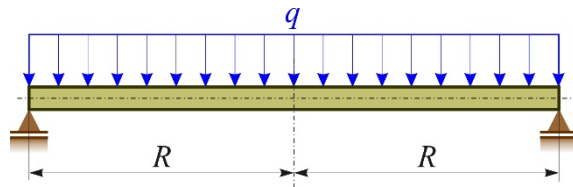
Primjer 8.2.

Tanka kružna ploča polumjera R i debljine h oslonjena je zglobno duž ruba i opterećena jednoliko raspodijeljenim opterećenjem q prema slici 8.15.

Valja odrediti:

- raspodjelu momenata savijanja: radijalnog M_r i cirkularnog M_{φ} , i njihove najveće vrijednosti
- najveća normalna naprezanja
- najveći progib w_{\max} i najveći nagib elastične plohe ploče α_{\max} .

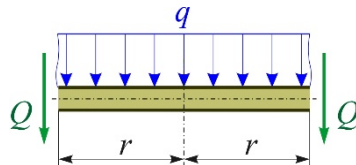
Zadano je: $R = 120 \text{ mm}$, $h = 12 \text{ mm}$, $q = 2 \text{ N/mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.



Slika 8.15. *Primjer 8.2.*

Rješenje:

Poprečna sila može se dobiti iz uvjeta ravnoteže isječenog elementa ploče (slika 8.16):



Slika 8.16. *Primjer 8.2.*

$$\sum F_z = 0: 2 \cdot r \cdot \pi \cdot Q + r^2 \cdot \pi \cdot q = 0, \quad Q = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot r.$$

Diferencijalna jednačina savijanja ploče glasi:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\alpha \cdot r) \right] = -\frac{q \cdot r}{2 \cdot D}.$$

Opće rješenje diferencijalne jednačine je:

$$\alpha = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{q \cdot r^3}{16 \cdot D}.$$

Budući da je ploča puna, bit će $C_2 = 0$, pa se opće rješenje svodi na izraz:

$$\alpha = C_1 \cdot r - \frac{q \cdot r^3}{16 \cdot D}.$$

Konstanta integracije C_1 može se dobiti iz rubnog uvjeta $M_r(R) = 0$ kako slijedi:

$$\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{R} = 0$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = C_1 - \frac{3 \cdot q \cdot R^2}{16 \cdot D}, \quad \frac{\alpha}{R} = C_1 - \frac{q \cdot R^2}{16 \cdot D},$$

$$C_1 - \frac{3 \cdot q \cdot R^2}{16 \cdot D} + \nu \cdot \left(C_1 - \frac{q \cdot R^2}{16 \cdot D} \right) = 0,$$

$$C_1 = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{q \cdot R^2}{16 \cdot D}.$$

Funkcija nagiba glasi:

$$\alpha = \frac{q \cdot r}{16 \cdot D} \cdot \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot R^2 - r^2 \right).$$

Integriranjem gornjeg izraza dobije se funkcija progiba kako je ispod navedeno:

$$w = -\int \alpha(r) \, dr = -\int \frac{q \cdot r}{16 \cdot D} \cdot \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot R^2 - r^2 \right) \cdot dr,$$

$$w = -\frac{q}{16 \cdot D} \cdot \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot R^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) + C_3.$$

Konstanta integracije C_3 može se dobiti iz rubnog uvjeta $w(R) = 0$:

$$C_3 = \frac{q \cdot R^4}{64 \cdot D} \cdot \frac{5+\nu}{1+\nu}.$$

Konačni izraz za progib glasi:

$$w = \frac{q \cdot R^4}{64 \cdot D} \cdot \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} + \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \frac{6+2 \cdot \nu}{1+\nu} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Najveći je progib u sredini ploče, tj. za $r = 0$, i iznosi:

$$w_{\max} = \frac{5+\nu}{(1+\nu)} \cdot \frac{q \cdot R^4}{64 \cdot D} = \frac{3}{16} \cdot \frac{(5+\nu) \cdot (1-\nu) \cdot q \cdot R^4}{E \cdot h^3}.$$

Najveći nagib javlja se na rubu, tj. za $r = R$, i iznosi:

$$\alpha_{\max} = \frac{q \cdot R^3}{8 \cdot D \cdot (1+\nu)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-\nu) \cdot q \cdot R^3}{E \cdot h^3}.$$

Radijalni i cirkularni moment savijanja glase:

$$M_r = D \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr} + \nu \cdot \frac{\alpha}{r} \right) = \frac{3+\nu}{16} \cdot q \cdot (R^2 - r^2),$$

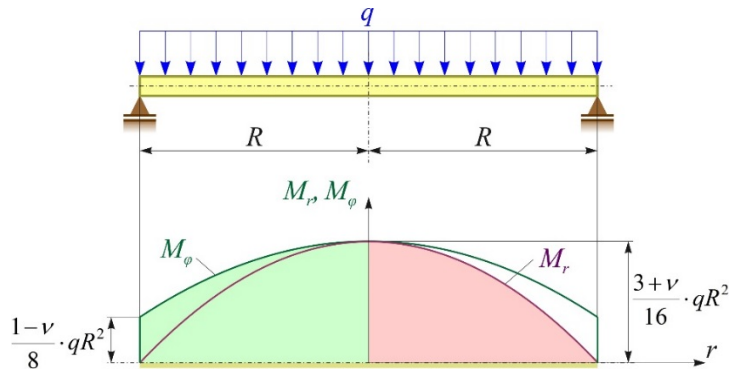
$$M_\varphi = D \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \cdot \frac{d\alpha}{dr} \right) = \frac{3+\nu}{16} \cdot q \cdot \left(R^2 - \frac{1+3 \cdot \nu}{3+\nu} \cdot r^2 \right).$$

Oba momenta savijanja imaju najveću vrijednost u sredini ploče, tj. za $r = 0$:

$$M_{r \max} = \frac{3+\nu}{16} \cdot q \cdot R^2,$$

$$M_{\varphi \max} = \frac{3+\nu}{16} \cdot q \cdot R^2.$$

Raspodjela ovih momenata savijanja dana je na slici 8.17.



Slika 8.17. Primjer 8.2.

Za zadane vrijednosti tražene veličine iznose:

$$M_{r \max} = M_{\varphi \max} = \frac{3+\nu}{16} \cdot q \cdot R^2 = \frac{3+0,3}{16} \cdot 2 \cdot 120^2 = 5940 \text{ Nmm/mm},$$

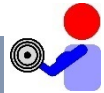
$$\sigma_{r \max} = \sigma_{\varphi \max} = \frac{6 \cdot 5940}{12^2} = 247,5 \text{ MPa},$$

$$w_{\max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{(5+\nu) \cdot (1-\nu) \cdot q \cdot R^4}{E \cdot h^3} = \frac{3}{16} \cdot \frac{(5+0,3) \cdot (1-0,3) \cdot 2 \cdot 120^4}{200 \cdot 10^3 \cdot 12^3}$$

$$w_{\max} = 0,835 \text{ mm}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-\nu) \cdot q \cdot R^3}{E \cdot h^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-0,3) \cdot 2 \cdot 120^3}{200 \cdot 10^3 \cdot 12^3} = 0,0105 \text{ rad}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

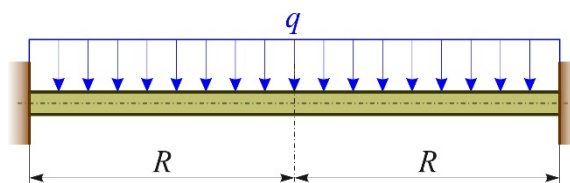


Zadatak 8.1.

Tanka kružna ploča polumjera R i debljine h ukliještena je na rubu i opterećena jednoliko raspodijeljenim opterećenjem q prema slici Z.8.1. Potrebno je odrediti:

- raspodjelu radijalnog i cirkularnog momenata savijanja M_r i M_φ
- najveći progib w_{\max} i najveći nagib α_{\max}
- najveće radijalno naprezanje σ_r i najveće cirkularno naprezanje σ_φ .

Zadano je: $R = 200 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$, $q = 2 \text{ N/mm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.



Slika Z.8.1. Zadatak 8.1.

9. UVIJANJE ŠTAPOVA NEOKRUGLOGA POPREČNOG PRESJEKA

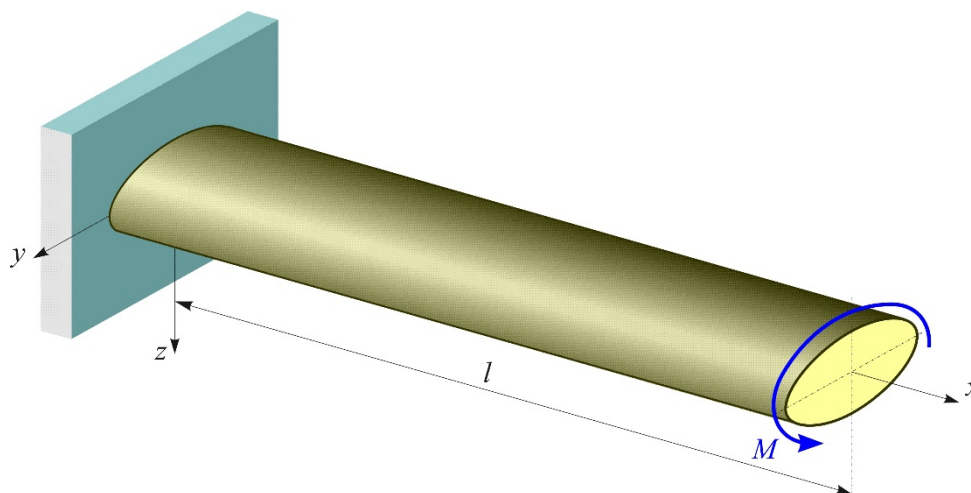
Uvijanje štapova okrugloga poprečnog presjeka obrađeno je u kolegiju *Nauka o čvrstoći*, gdje su dani izrazi za izračunavanje najvećih posmičnih naprezanja i kuta uvijanja.

U slučaju uvijanja štapova neokrugloga poprečnog presjeka određivanje izraza za posmična naprezanja i relativni kut uvijanja predstavlja složen matematički problem, a rješava se u okviru teorije elastičnosti.

U ovom poglavlju navest će se gotovi izrazi za izračunavanje posmičnih naprezanja i relativnog kuta uvijanja za nekoliko oblika neokruglih poprečnih presjeka bez njihova izvođenja.

9.1. UVIJANJE ŠTAPA ELIPTIČNOGA POPREČNOG PRESJEKA

Razmotrimo štap eliptičnoga poprečnog presjeka ukliješten na lijevom kraju te opterećen na slobodnom kraju koncentriranim momentom M (slika 9.1.). Moment uvijanja u poprečnom presjeku štapa jednak je vanjskom momentu, tj. $M_t = M$.



Slika 9.1. Štap eliptičnoga poprečnog presjeka opterećen momentom na slobodnom kraju

Posmična naprezanja u proizvoljnoj točki poprečnog naprezanja mogu se izračunati prema izrazu:

$$\tau(y, z) = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a^3 \cdot b^3} \cdot [b^4 \cdot y^2 + a^4 \cdot z^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (9.1)$$

Raspodjela posmičnih naprezanja duž velike osi elipse dana je izrazom:

$$\tau(y, z = 0) = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a^3 \cdot b^3} \cdot b^2 \cdot y = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a^3 \cdot b} \cdot y, \quad (9.2)$$

a duž male osi elipse izrazom:

$$\tau(y=0, z) = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a^3 \cdot b^3} \cdot a^2 \cdot z = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a \cdot b^3} \cdot z. \quad (9.3)$$

Iz izraza (9.2.) i (9.3.) vidljiva je linearna raspodjela posmičnih naprezanja duž velike i male osi elipse (slika 9.2.).

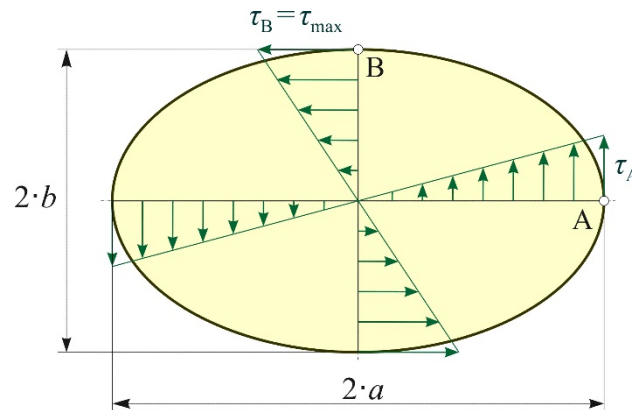
Najveća posmična naprezanja na velikoj osi iznose:

$$\tau_A = \tau(y=-a, z=0) = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a^2 \cdot b}, \quad (9.4)$$

a na maloj osi:

$$\tau_B = \tau(y=0, z=-b) = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot a \cdot b^2}. \quad (9.5)$$

Budući da je $a > b$, najveće posmično naprezanje dano je izrazom (9.5.).



Slika 9.2. Linearna raspodjela posmičnih naprezanja duž velike i male osi elipse

Omjer najvećih naprezanja na maloj i velikoj osi jest:

$$\frac{\tau_B}{\tau_A} = \frac{a}{b}. \quad (9.6)$$

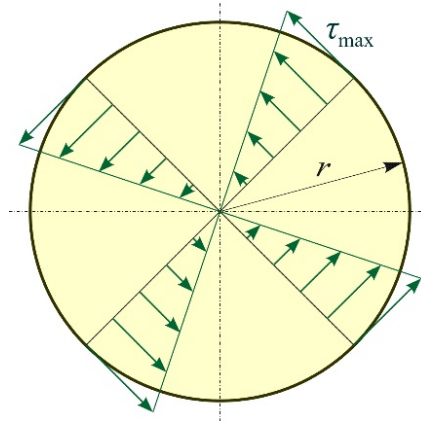
Relativni kut uvijanja dobije se prema izrazu:

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}}. \quad (9.7)$$

Za $a = b$ eliptični poprečni presjek prelazi u kružni ($d = 2 \cdot a$), a izraz (9.5) postaje:

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot r \cdot r^2} = \frac{M}{\frac{\pi \cdot r^3}{2}} = \frac{M}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{M}{W_p}. \quad (9.8)$$

Raspodjela posmičnih naprezanja za kružni poprečni presjek dana je na slici 9.3.



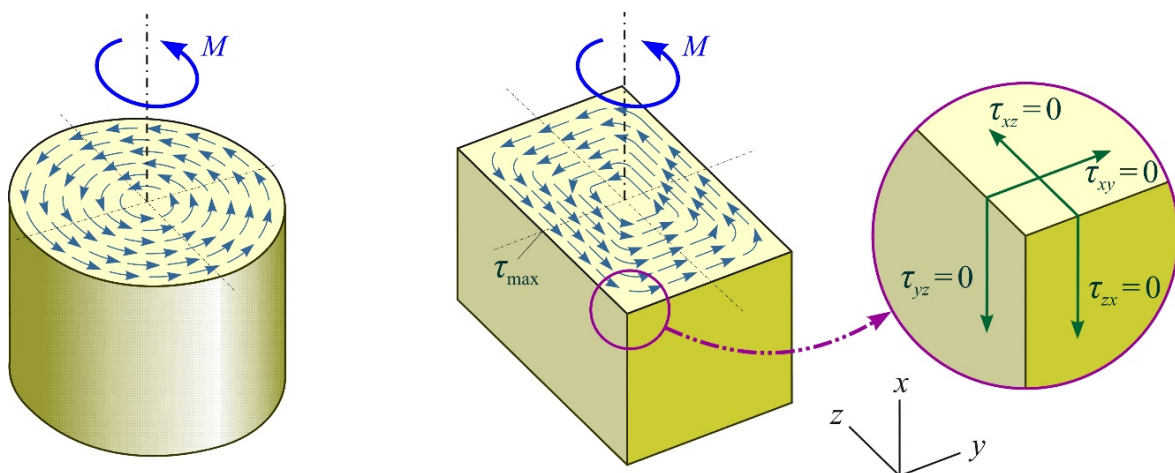
Slika 9.3. Linearna raspodjela posmičnih naprezanja za kružni poprečni presjek

Izraz (9.7) za relativni kut uvijanja sada je:

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot r^3 \cdot r^3}{r^2 + r^2}} = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2}} = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{M_t}{G \cdot I_p}. \quad (9.9)$$

9.2. UVIJANJE ŠTAPA PRAVOKUTNOGA POPREČNOG PRESJeka

Za razliku od kružnoga poprečnog presjeka gdje su najveća posmična naprezanja u točkama na vanjskom rubu, u vrhovima pravokutnoga poprečnog presjeka posmično naprezanje jednako je nuli (slika 9.4.).



Slika 9.4. Raspodjela posmičnih naprezanja za kružni i pravokutni poprečni presjek

Za štap pravokutnoga poprečnog presjeka stranica a i b ($a > b$) opterećen na uvijanje (slika 9.5.) najveće posmično naprezanje javlja se na sredini konture veće stranice (točka B) (slika 9.6.) i računa se prema izrazu:

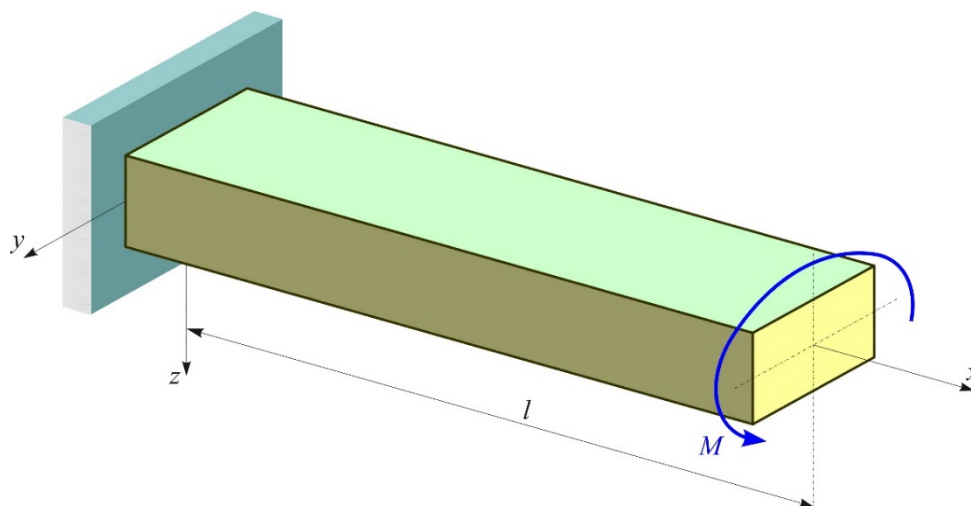
$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{M}{\alpha \cdot a \cdot b^2}. \quad (9.10)$$

Posmično naprezanje na sredini kraće stranice (točka A) dobije se prema:

$$\tau_A = \gamma \tau_{\max} \cdot \quad (9.11)$$

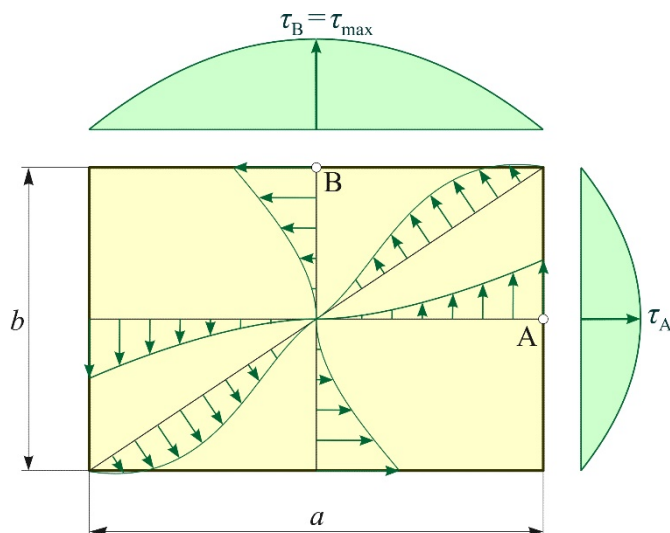
Relativni kut uvijanja može se izračunati uz pomoć izraza:

$$\vartheta = \frac{M_t}{\beta \cdot G \cdot a \cdot b^3} \cdot \quad (9.12)$$



Slika 9.5. Štap pravokutnoga poprečnog presjeka opterećen momentom na slobodnom kraju

Raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku prikazana je na slici 9.6.



Slika 9.6. Raspodjela posmičnih naprezanja za pravokutni poprečni presjek

U izrazima (9.10), (9.11) i (9.12) α , β i γ su nedimenzionalni koeficijenti ovisni o omjeru stranica pravokutnoga poprečnog presjeka a/b . Vrijednosti ovih koeficijenata za različite omjere a/b dane su u tablici 9.1.

Za $a=b$ pravokutni poprečni presjek prelazi u kvadratni, a izrazi za najveće posmično naprezanje (9.10) i relativni kut uvijanja (9.12) postaju:

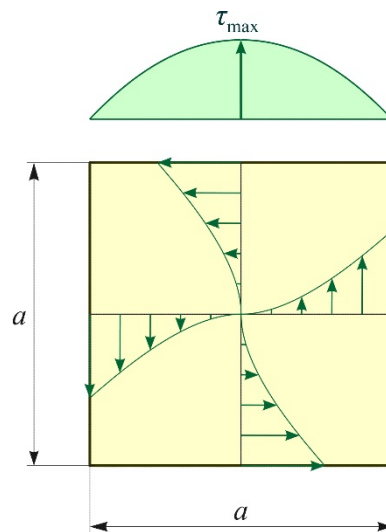
$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{M}{\alpha \cdot a^3}, \quad (9.13)$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{\beta \cdot G \cdot a^4}. \quad (9.14)$$

Tablica 9.1. Vrijednosti koeficijenta α , β i γ ovisne o omjeru a/b

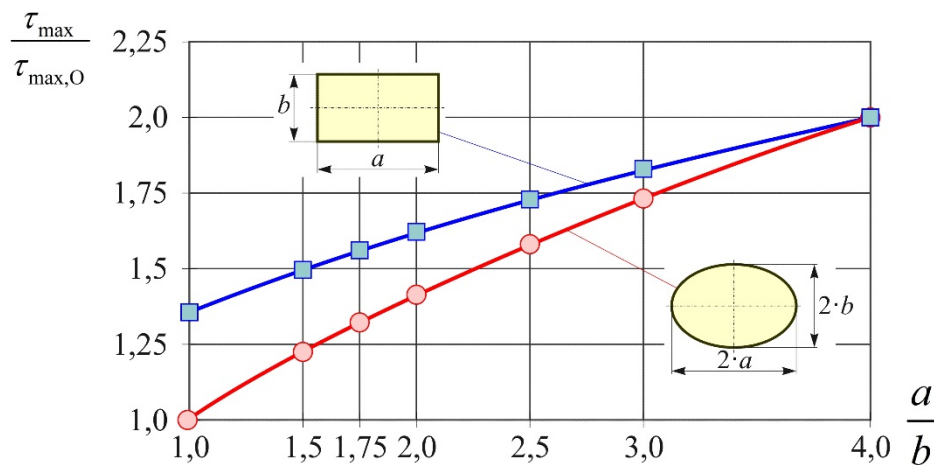
a/b	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,299	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Raspodjela posmičnih naprezanja za kvadratni poprečni presjek dana je na slici 9.7.



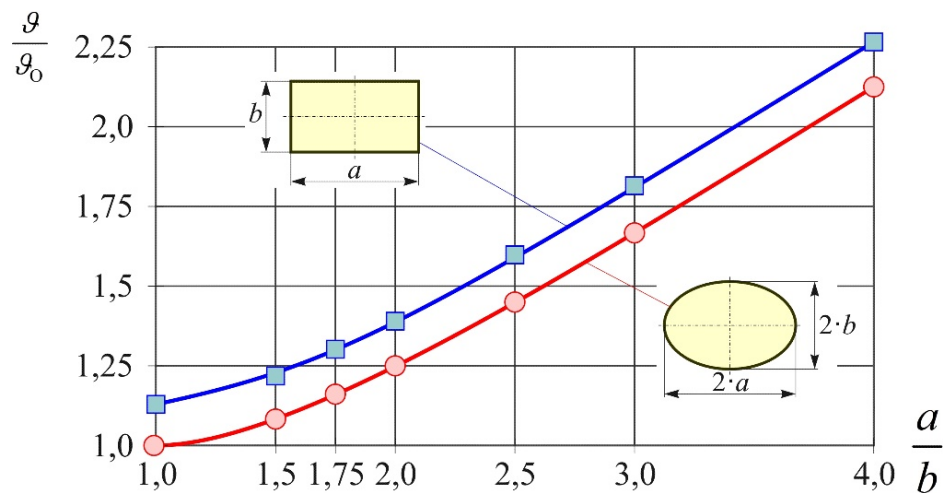
Slika 9.7. Raspodjela posmičnih naprezanja za pravokutni poprečni presjek

Na slici 9.8. prikazan je, za pravokutni i eliptični poprečni presjek, omjer najvećeg posmičnog naprezanja i najvećeg posmičnog naprezanja kod kružnoga poprečnog presjeka za različite omjere a/b i uz jednake površine poprečnih presjeka. Vidljivo je da su eliptični oblici povoljniji od pravokutnih za omjere $a/b < 4$, a najpovoljniji je kružni poprečni presjek.



Slika 9.8. Omjer najvećeg posmičnog naprezanja i najvećeg posmičnog naprezanja za kružni poprečni presjek za različite omjere a/b

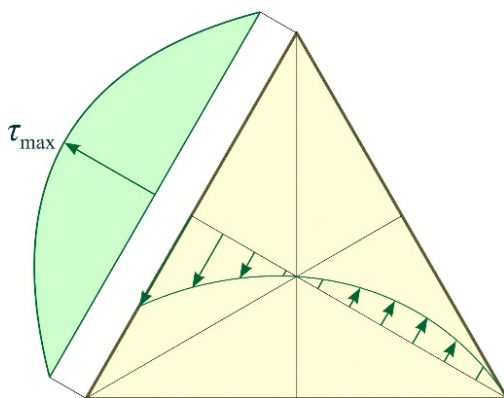
Na slici 9.9. prikazan je, za pravokutni i eliptični poprečni presjek, omjer relativnog kuta uvijanja i relativnog kuta uvijanja kružnoga poprečnog presjeka za različite omjere a/b i uz jednake površine poprečnih presjeka. I u pogledu relativnog kuta uvijanja eliptični su oblici povoljniji od pravokutnih, a opet je najpovoljniji kružni poprečni presjek.



Slika 9.9. Omjer relativnog kuta uvijanja i relativnog kuta uvijanja za kružni poprečni presjek za različite omjere a/b

9.3. UVIJANJE ŠTAPA TROKUTNOGA POPREČNOG PRESJEKA

Ako je poprečni presjek u obliku istostraničnog trokuta, izrazi za najveće posmično naprezanje i relativni kut uvijanja glase:



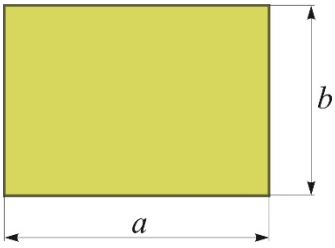
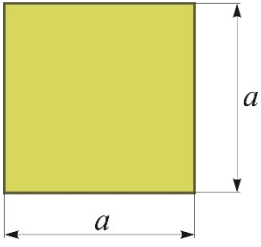
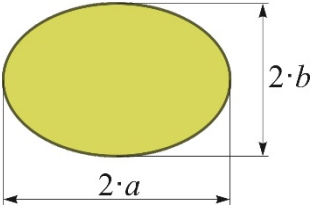
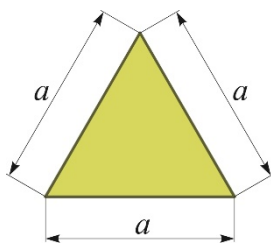
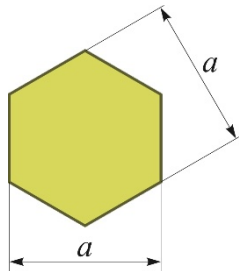
Slika 9.10. Raspodjela posmičnih napreznja za trokutni poprečni presjek

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{a^3}{20}}, \quad (9.15)$$

$$g = \frac{M_t}{G \cdot \frac{a^4}{46,19}}. \quad (9.16)$$

Najveće posmično naprezanje javlja se na sredini osnovnog brida (slika 9.10).

Tablica 9.2. Izrazi za najveće posmično naprezanje i relativni kut uvijanja za različite oblike poprečnog presjeka

Oblik poprečnog presjeka	Površina	Najveće posmično naprezanje	Relativni kut uvijanja
	$a \cdot b$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot a \cdot b^2}$	$\vartheta = \frac{M_t}{\beta \cdot G \cdot a \cdot b^3}$
	a^2	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot a^3}$	$\vartheta = \frac{M_t}{\beta \cdot G \cdot a^4}$
	$\pi \cdot a \cdot b$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot a \cdot b^2}{2}}$	$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}}$
	$0,433 \cdot a^2$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{a^3}{20}}$	$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot \frac{a^4}{46,19}}$
	$0,866 \cdot a^2$	$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{a^3}{0,188}}$	$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot \frac{a^4}{0,114}}$

U tablici 9.2. dani su izrazi za najveće posmično naprežanje i relativni kut uvijanja za različite oblike poprečnog presjeka.

U istoj tablici izrazi za najveće posmično naprežanje i relativni kut uvijanja mogu se za sve oblike neokrugloga poprečnog presjeka pisati kao

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (9.17)$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_t}, \quad (9.18)$$

gdje su W_t torzijski moment otpora poprečnog presjeka i I_t torzijski moment tromosti poprečnog presjeka, za razliku od polarnog momenta otpora W_p i polarnog momenta tromosti I_p , kojima smo se koristili pri uvijanju štapa okrugloga poprečnog presjeka.

9.4. UVIJANJE ŠTAPA ZATVORENOGA I OTVORENOGA TANKOSTJENOGA POPREČNOG PRESJEKA

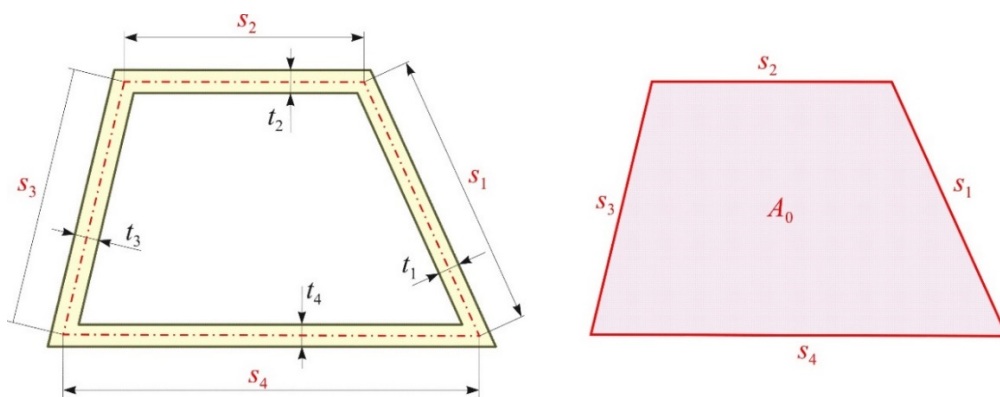
Ako se radi o tankostjenom zatvorenom poprečnom presjeku (slika 9.11), najveće posmično naprežanje i relativni kut uvijanja mogu se računati pomoću prve i druge Bredtove formule:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot A_0 \cdot t}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = 2 \cdot A_0 \cdot t_{\min}; \quad (9.19)$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_t}, \quad I_t = \frac{4 \cdot A_0^2}{\oint \frac{ds}{dt}}. \quad (9.20)$$

U izrazima (9.19) i (9.20) A_0 je površina koju zatvara središnja linija koja raspolovljuje debljinu stijenke t .

Najveće posmično naprežanje kod tankostjenoga zatvorenoga poprečnog presjeka javlja se na mjestu gdje je stijenka najtanja. Posmična naprežanja su konstantna po dijelovima presjeka.



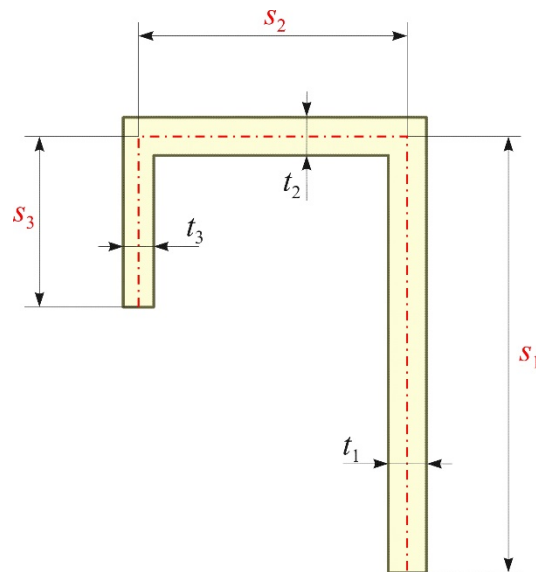
Slika 9.11. Tankostjeni zatvoreni poprečni presjek

Kod tankostjenoga otvorenoga poprečnog presjeka (slika 9.12) najveće posmično naprezanje i relativni kut uvijanja mogu se računati prema izrazima:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad \vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_t}, \quad (9.21)$$

gdje se torzijski moment tromosti I_t i torzijski moment otpora W_t mogu dobiti prema:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot t_i^3, \quad W_t = \frac{I_t}{t_{\max}}. \quad (9.22)$$

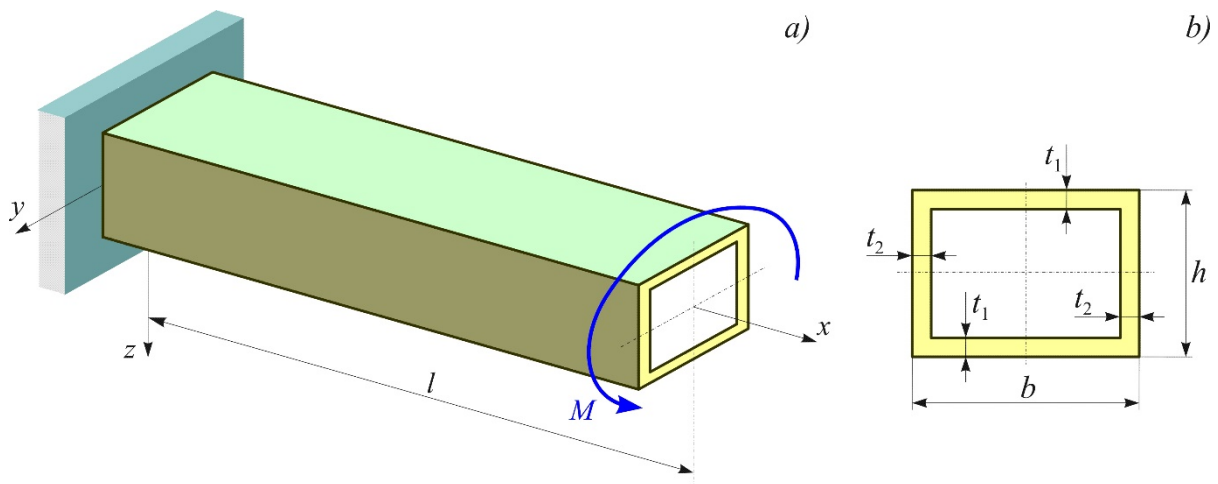


Slika 9.12. Tankostjeni otvoreni poprečni presjek

Primjer 9.1.

Tankostjeni štاپ zatvorenoga poprečnog presjeka opterećen je na slobodnom kraju momentom M (slika 9.13.). Treba odrediti najveće posmično naprezanje te relativni kut uvijanja štapa.

Zadano je: $b = 180 \text{ mm}$, $h = 130 \text{ mm}$, $t_1 = 6 \text{ mm}$, $t_2 = 4 \text{ mm}$, $M = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $G = 80 \text{ GPa}$.

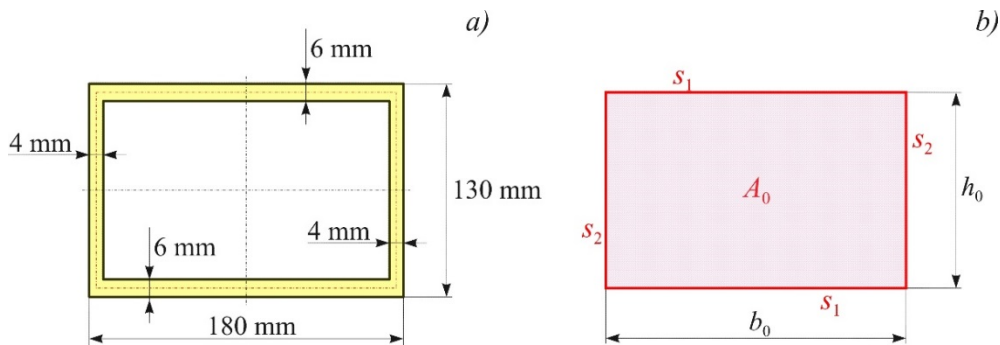


Slika 9.13. Primjer 9.1.

Rješenje:

Površina A_0 (slika 9.14.b) iznosi:

$$A_0 = b_0 \cdot h_0 = \left(b - 2 \cdot \frac{t_2}{2}\right) \cdot \left(h - 2 \cdot \frac{t_1}{2}\right) = 176 \cdot 124 = 21824 \text{ mm}^2.$$



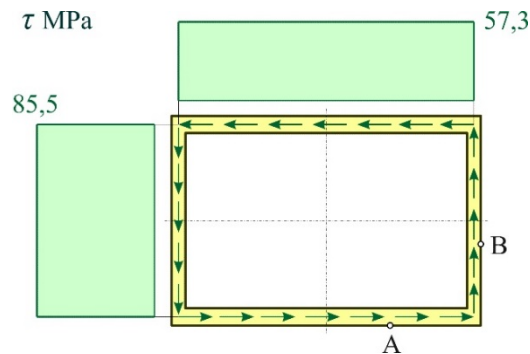
Slika 9.14. *Primjer 9.1.*

Posmična naprezanja u točkama A (horizontalne stijenke) i B (vertikalne stijenke) jesu:

$$\tau_A = \frac{M_t}{2 \cdot A_0 \cdot t_1} = \frac{15 \cdot 10^6}{2 \cdot 21824 \cdot 6} = 57,3 \text{ MPa},$$

$$\tau_B = \frac{M_t}{2 \cdot A_0 \cdot t_2} = \frac{15 \cdot 10^6}{2 \cdot 21824 \cdot 4} = 85,9 \text{ MPa}.$$

Raspodjela posmičnih naprezanja dana je na slici 9.15.



Slika 9.15. *Primjer 9.1.*

Dakle, veće je naprezanje u stijenci koja ima manju debljinu.

Torzijski moment tromosti iznosi:

$$I_t = \frac{4 \cdot A_0^2}{\oint \frac{ds}{dt}} = \frac{4 \cdot A_0^2}{2 \cdot \left(\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}\right)} = \frac{2 \cdot 21824^2}{\frac{176}{6} + \frac{124}{4}} = 15788519 \text{ mm}^4.$$

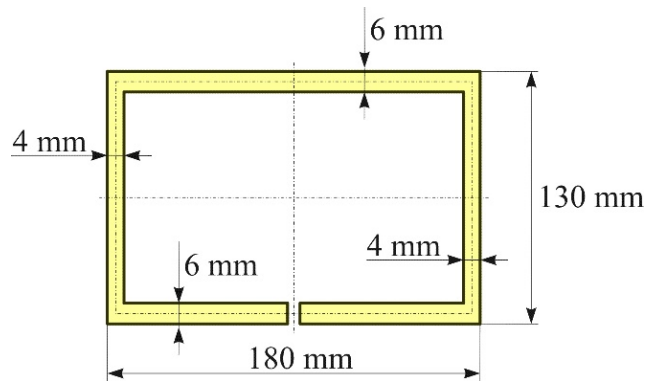
Relativni kut uvijanja sada je:

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_t} = \frac{15 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3 \cdot 15,789 \cdot 10^6} = 0,000012 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}.$$

Primjer 9.2.

Tankostjeni štap iz primjera 9.1., ali otvorenoga poprečnog presjeka (slika 9.16.), opterećen je na slobodnom kraju momentom M . Treba odrediti najveće posmično naprezanje te relativni kut uvijanja štapa.

Zadano je: $b = 180 \text{ mm}$, $h = 130 \text{ mm}$, $t_1 = 6 \text{ mm}$, $t_2 = 4 \text{ mm}$, $M = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $G = 80 \text{ GPa}$.



Slika 9.16. Primjer 9.2.

Rješenje:

Torzijski moment tromosti i torzijski moment otpora mogu se dobiti prema (9.22) i iznose:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot s_1 \cdot t_1^3 + 2 \cdot s_2 \cdot t_2^3) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 176 \cdot 6^3 + 2 \cdot 124 \cdot 4^3),$$

$$I_t = 30635 \text{ mm}^4,$$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{30635}{6} = 5106 \text{ mm}^3.$$

Najveće posmično naprezanje i kut uvijanja iznose (9.21):

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{15 \cdot 10^6}{5106} = 2938 \text{ MPa},$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_t} = \frac{15 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3 \cdot 30635} = 0,00612 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}.$$

Najveće posmično naprezanje javlja se u najdebljem dijelu presjeka za razliku od zatvorenoga tankostjenog presjeka kod kojeg se najveće posmično naprezanje javlja na mjestu gdje je stijenka najtanja.

Usporedbom rezultata za najveće posmično naprezanje i kut uvijanja štapa s otvorenim i sa zatvorenim poprečnim presjekom dobije se:

$$\frac{(\tau_{\max})_{\text{otv}}}{(\tau_{\max})_{\text{zatv}}} = \frac{2938}{85,9} = 34,2;$$

$$\frac{(\mathcal{G})_{\text{otv}}}{(\mathcal{G})_{\text{zav}}} = \frac{0,00612}{0,000012} = 510.$$

Drugim riječima, za ovaj je štap krutost štapa sa zatvorenim tankostjenim poprečnim presjekom u odnosu na štap s otvorenim poprečnim presjekom 510 puta veća, dok je nosivost 34 puta veća.

10. RJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU

1. Potencijalna energija deformiranosti

Zadatak 1.1.

$$U = 18,417 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zadatak 1.3.

$$U = 27,707 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zadatak 1.5.

$$U = 284,75 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zadatak 1.7.

$$U = 686,26 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zadatak 1.2.

$$U = 20,045 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zadatak 1.4.

$$U = 486,53 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Zadatak 1.6.

$$U = 163,84 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2. Koeficijenti podatnosti

Zadatak 2.1.

$$f_{11} = \frac{4 \cdot l}{A \cdot E}, \quad f_{12} = \frac{3 \cdot l}{A \cdot E}, \quad f_{13} = \frac{l}{A \cdot E},$$
$$f_{22} = \frac{3 \cdot l}{A \cdot E}, \quad f_{23} = \frac{l}{A \cdot E}, \quad f_{33} = \frac{l}{A \cdot E},$$
$$u_1 = \frac{14 \cdot F \cdot l}{A \cdot E}, \quad u_2 = \frac{12 \cdot F \cdot l}{A \cdot E}, \quad u_3 = \frac{6 \cdot F \cdot l}{A \cdot E}.$$

Zadatak 2.2.

$$f_{11} = 2,2 \cdot \frac{l}{I_p \cdot G}, \quad f_{12} = \frac{l}{I_p \cdot G},$$
$$f_{22} = \frac{l}{I_p \cdot G},$$
$$\alpha_1 = -7,6 \cdot \frac{M \cdot l}{I_p \cdot G}, \quad \alpha_2 = -4 \cdot \frac{M \cdot l}{I_p \cdot G}.$$

Zadatak 2.3.

$$f_{11} = \frac{9 \cdot l^3}{I_y \cdot E}, \quad f_{12} = \frac{4 \cdot l^2}{I_y \cdot E}, \quad f_{22} = \frac{2 \cdot l}{I_y \cdot E}, \quad w_1 = 17 \cdot \frac{F \cdot l^3}{I_y \cdot E}, \quad \beta_2 = 8 \cdot \frac{F \cdot l^2}{I_y \cdot E}.$$

3. Castiglianovi teoremi

Zadatak 3.1.

$$h_C = 4,134 \text{ mm}, \quad v_E = 20,93 \text{ mm}.$$

Zadatak 3.3.

$$\alpha_B = 0,01166 \text{ rad}.$$

Zadatak 3.4.

$$w_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(9 \cdot F \cdot l^3 - \frac{5}{2} \cdot M \cdot l^2 \right), \quad \beta_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{9}{2} \cdot F \cdot l^2 - M \cdot l \right),$$

Zadatak 3.2.

$$v_D = (10 + 14 \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{F \cdot l}{A \cdot E},$$
$$v_D = 11,83 \text{ mm}.$$

$$w_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot F \cdot l^3 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot l^2 \right),$$

$$w_A = 11,11 \text{ mm}, \quad \beta_A = 0,01009 \text{ rad}, \quad w_B = 1,389 \text{ mm}.$$

Zadatak 3.5.

$$w_A = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot F \cdot l^3 - M \cdot l^2 \right),$$

$$\beta_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot (-F \cdot l^2 + M \cdot l),$$

$$w_A = 18,035 \text{ mm}, \quad \beta_B = -0,00859 \text{ rad}.$$

Zadatak 3.7.

$$N_1 = 5,723 \text{ kN}, \quad N_2 = 3,284 \text{ kN},$$

$$N_3 = -6,469 \text{ kN}.$$

Zadatak 3.9.

$$F_A = 5,769 \text{ kN} \downarrow, \quad F_{C_x} = 20 \text{ kN} \leftarrow, \quad F_{C_z} = 15,769 \text{ kN} \uparrow, \quad M_C = 19,231 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

4. Mohrov integral

Zadatak 4.1.

$$v_C = 0,312 \text{ mm} \uparrow, \quad h_D = 1,681 \text{ mm} \rightarrow.$$

Zadatak 4.3.

$$\alpha_B = 0,00737 \text{ rad}, \quad \alpha_C = 0,01842 \text{ rad},$$

$$\alpha_D = 0,02812 \text{ rad}.$$

Zadatak 4.5.

$$w_A = -\frac{13}{5} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y}, \quad \beta_D = -\frac{3}{25} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y}.$$

Zadatak 4.7.

$$f_{11} = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I_y}, \quad f_{12} = \frac{l^3}{2 \cdot E \cdot I_y}, \quad f_{13} = -\frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I_y}, \quad f_{22} = \frac{7}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I_y}, \quad f_{23} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{l^2}{E \cdot I_y},$$

$$f_{33} = \frac{4 \cdot l}{E \cdot I_y}.$$

5. Metoda sila

Zadatak 5.1.

$$N_1 = -10,5 \text{ kN}, \quad N_2 = 13,4 \text{ kN}, \quad N_3 = -9,50 \text{ kN},$$

$$N_4 = -14,9 \text{ kN}, \quad N_5 = 9,50 \text{ kN}, \quad N_6 = 11,3 \text{ kN}.$$

Zadatak 3.6.

$$F_A = 11,4 \text{ kN},$$

$$F_D = 15,6 \text{ kN}.$$

Zadatak 3.8.

$$F_A = 13,5 \text{ kN}, \quad M_B = -9,0 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$F_B = 22,5 \text{ kN}.$$

Zadatak 4.2.

$$v_B = 8,271 \text{ mm} \downarrow.$$

Zadatak 4.4.

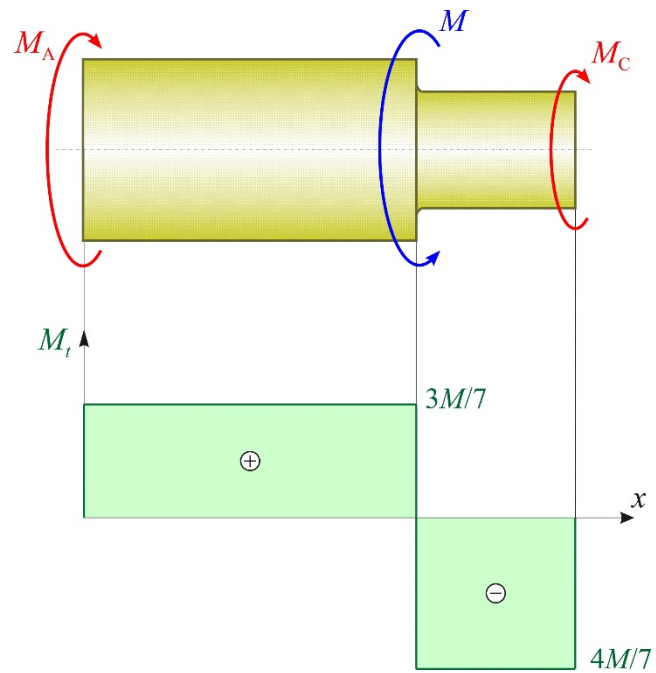
$$w_A = \frac{89}{6} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y}, \quad \beta_B = \frac{7}{2} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot I_y},$$

$$w_A = 123,2 \text{ mm}, \quad \beta_B = 0,0291 \text{ rad}.$$

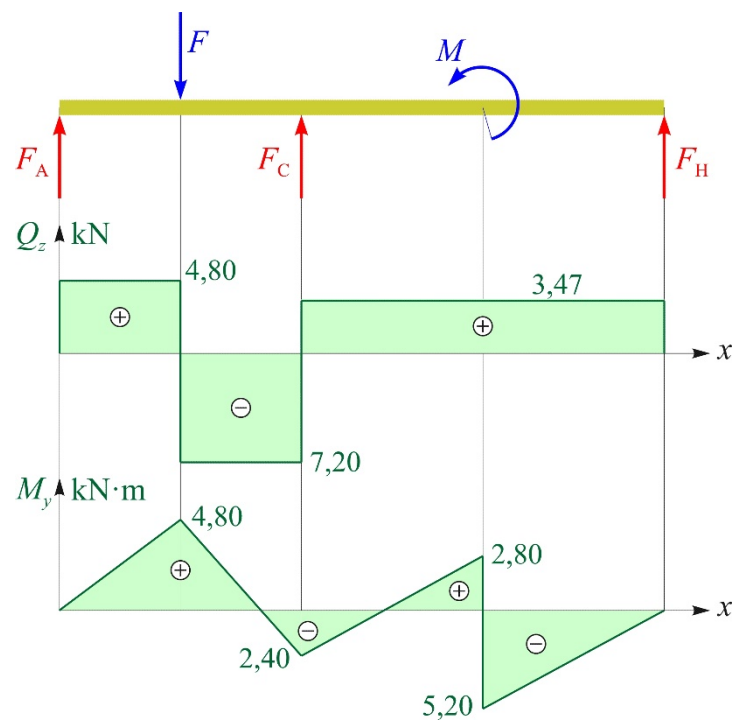
Zadatak 4.6.

$$v_A = \frac{249}{16} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y} \downarrow, \quad h_D = \frac{19}{12} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y} \leftarrow.$$

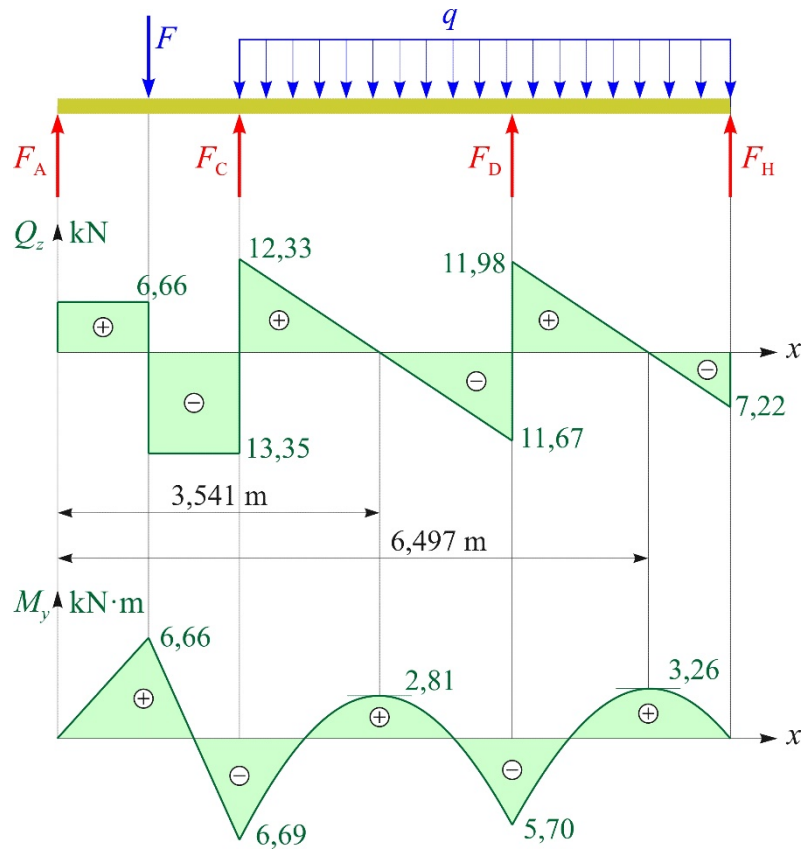
Zadatak 5.2.



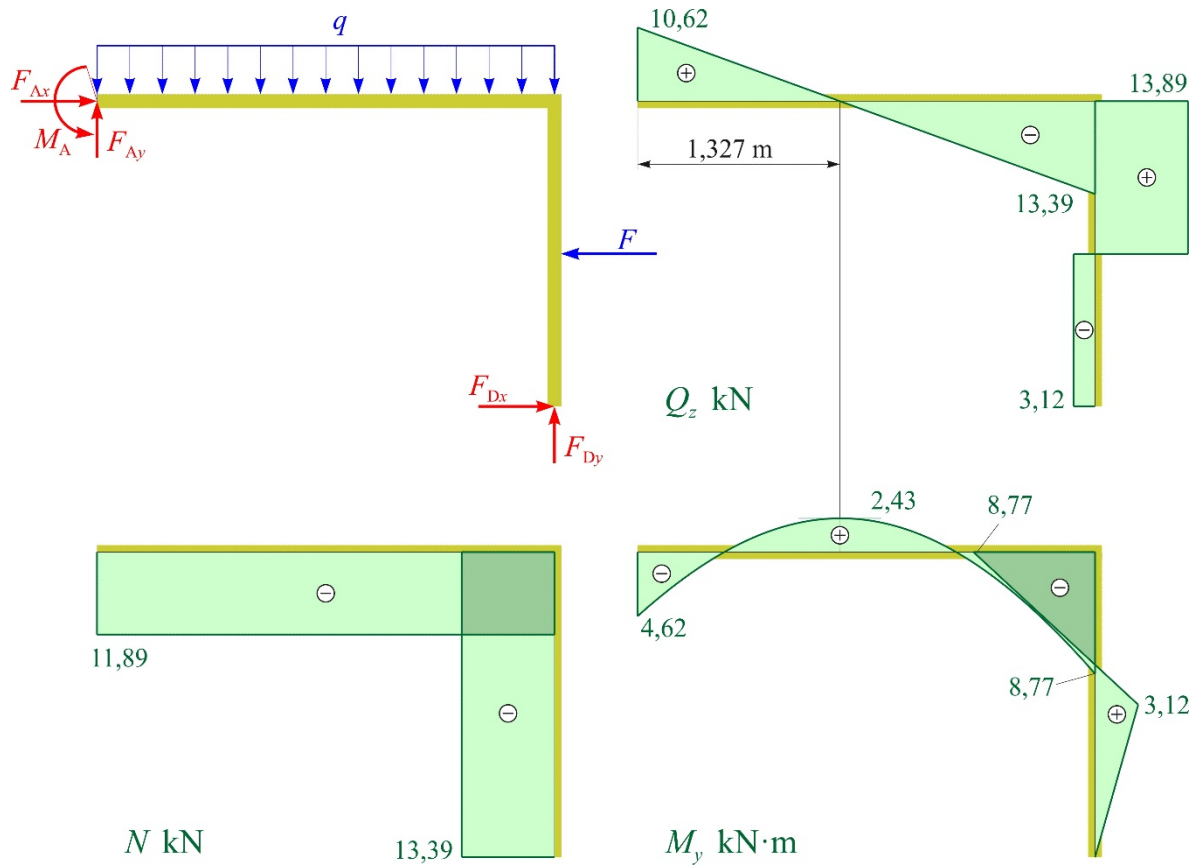
Zadatak 5.3.



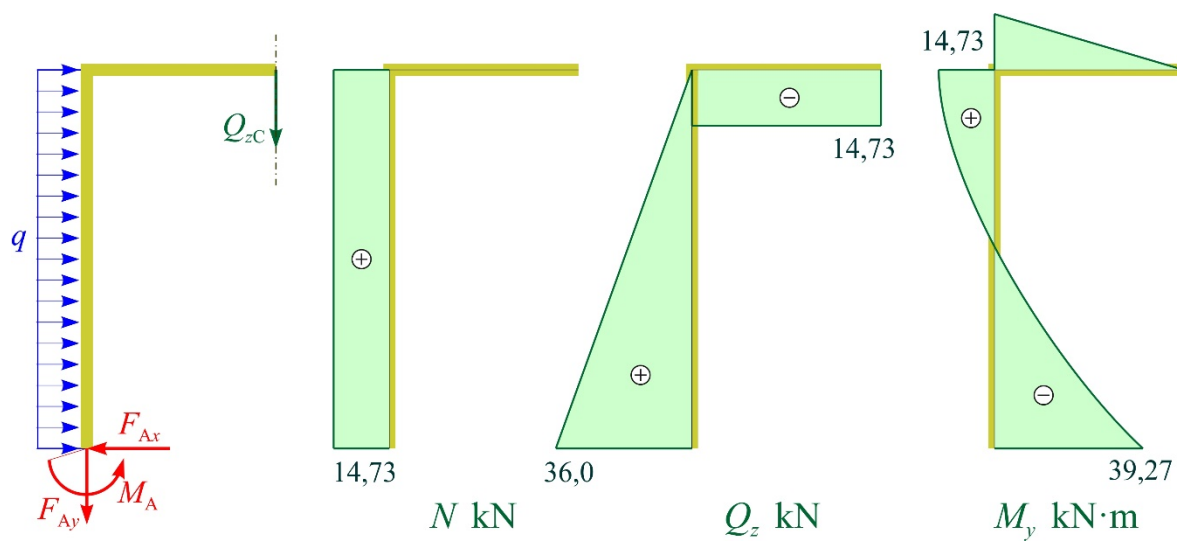
Zadatak 5.4.



Zadatak 5.5.

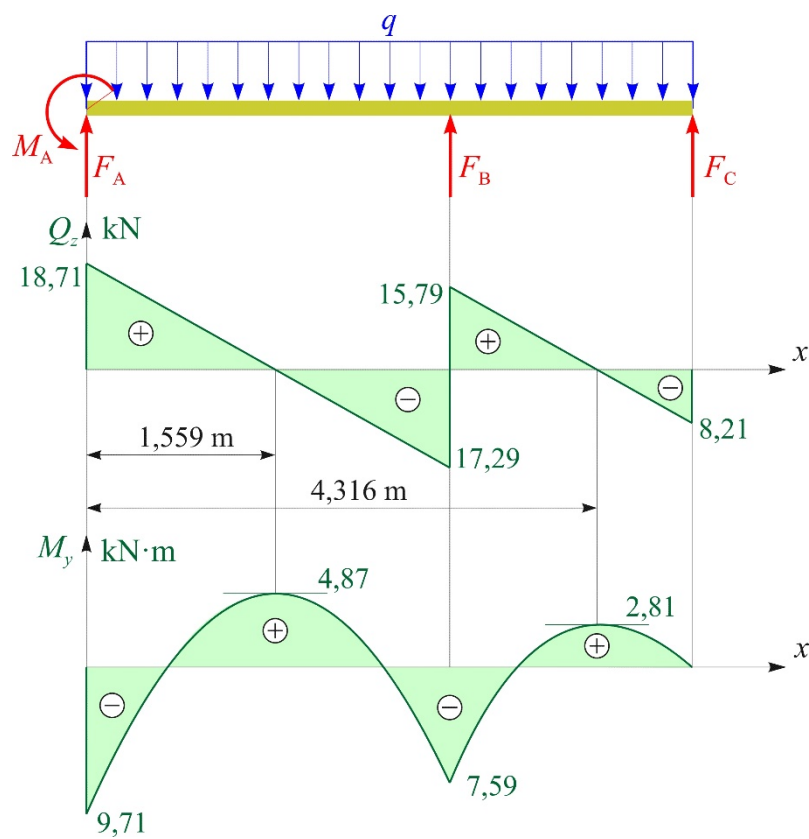


Zadatak 5.6.

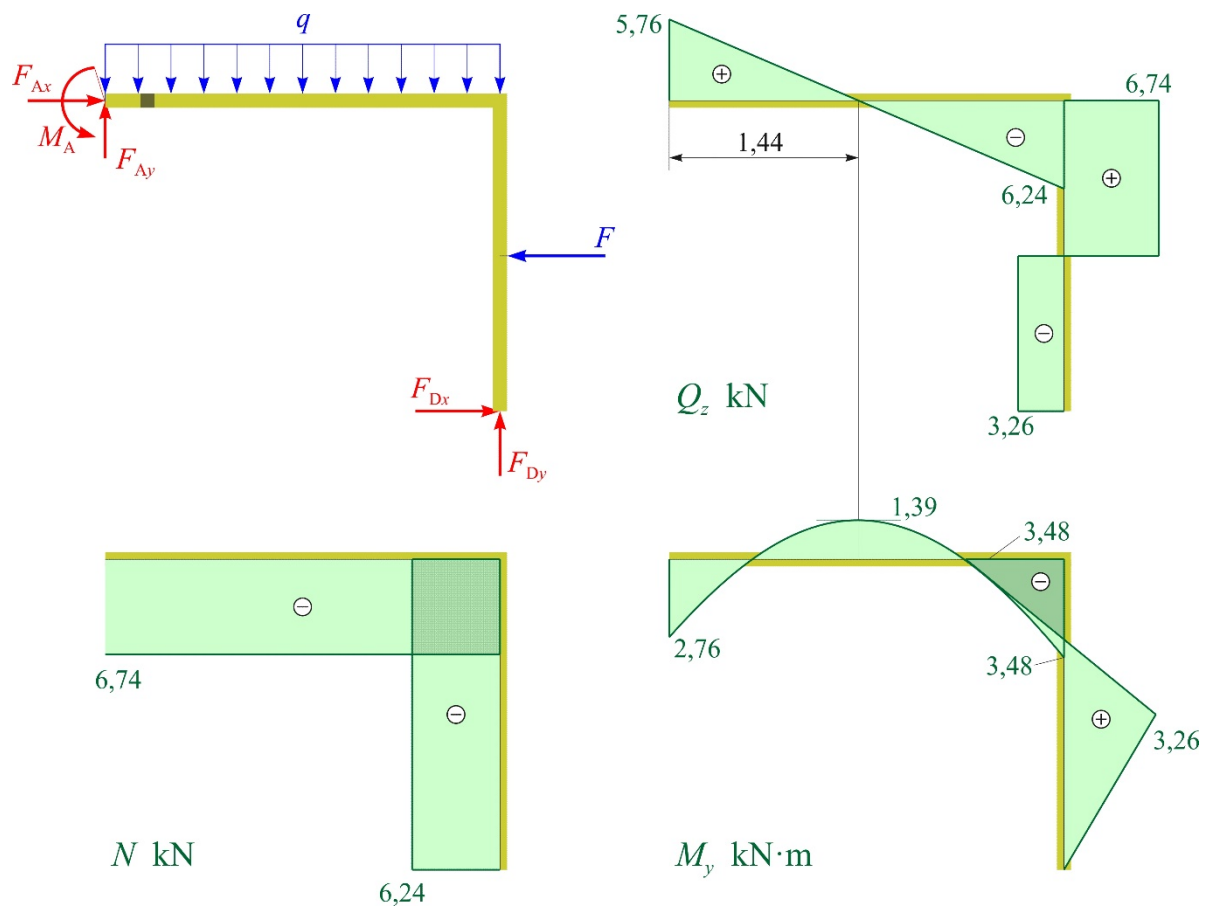


6. Metoda pomaka

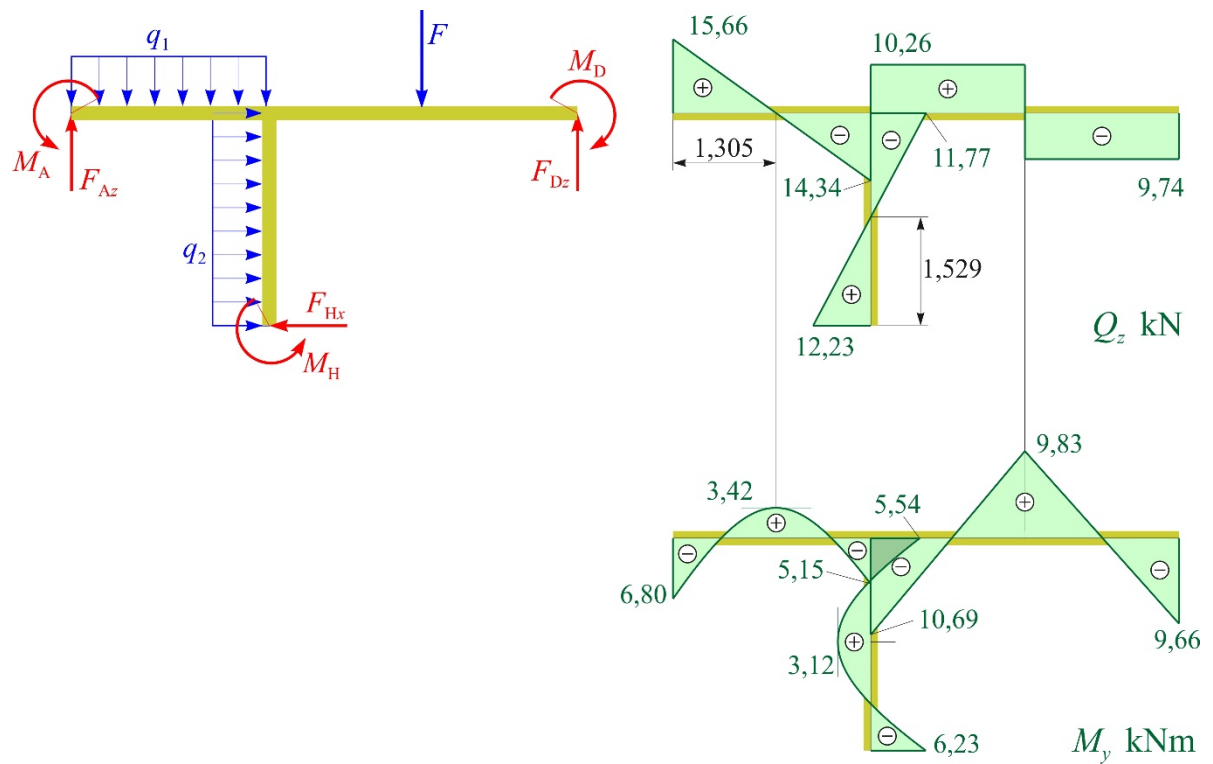
Zadatak 6.1.



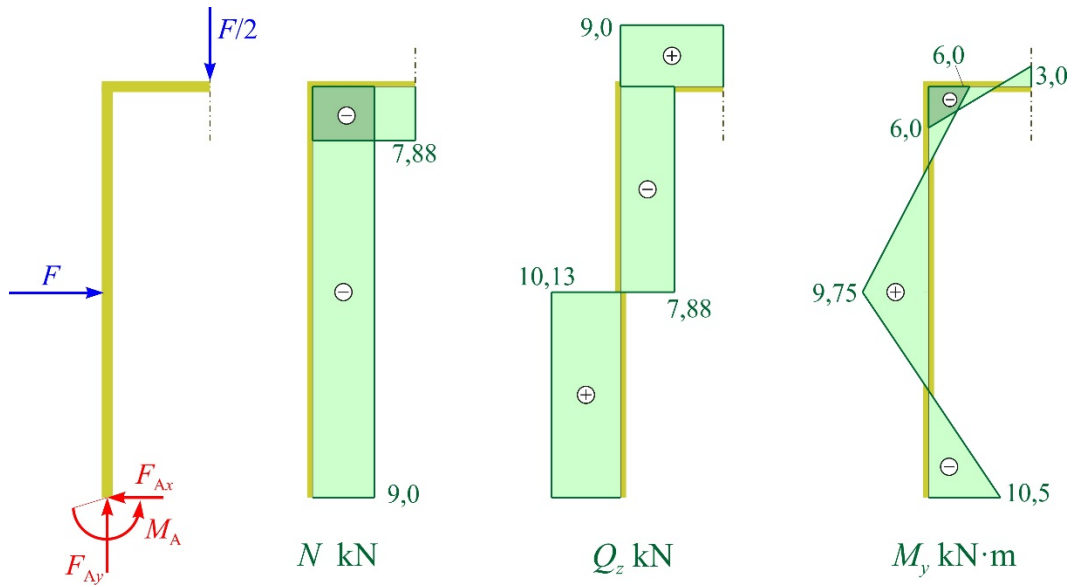
Zadatak 6.2.



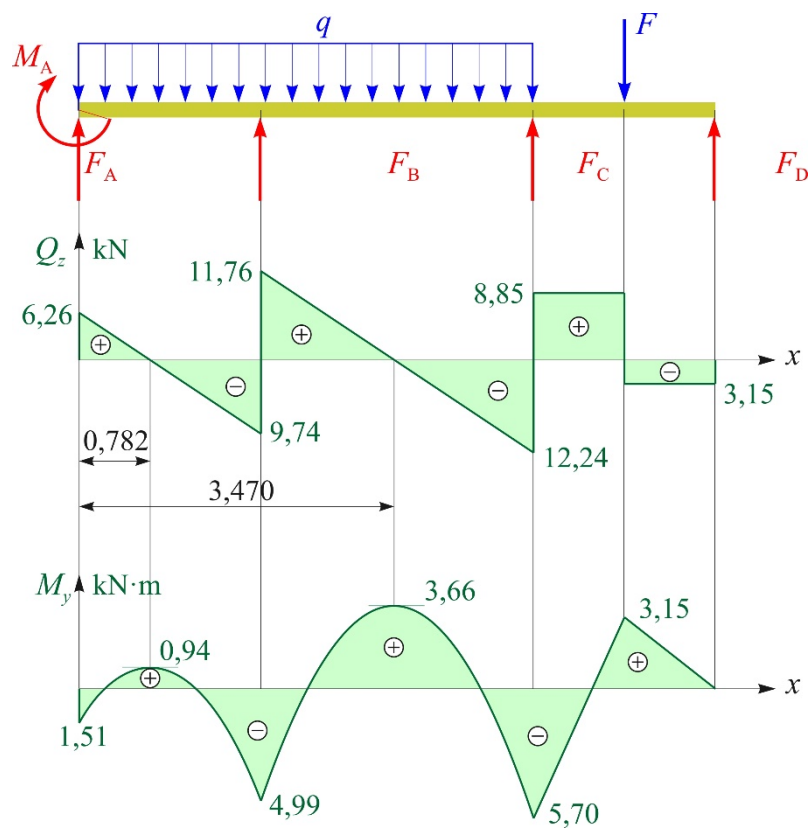
Zadatak 6.3.



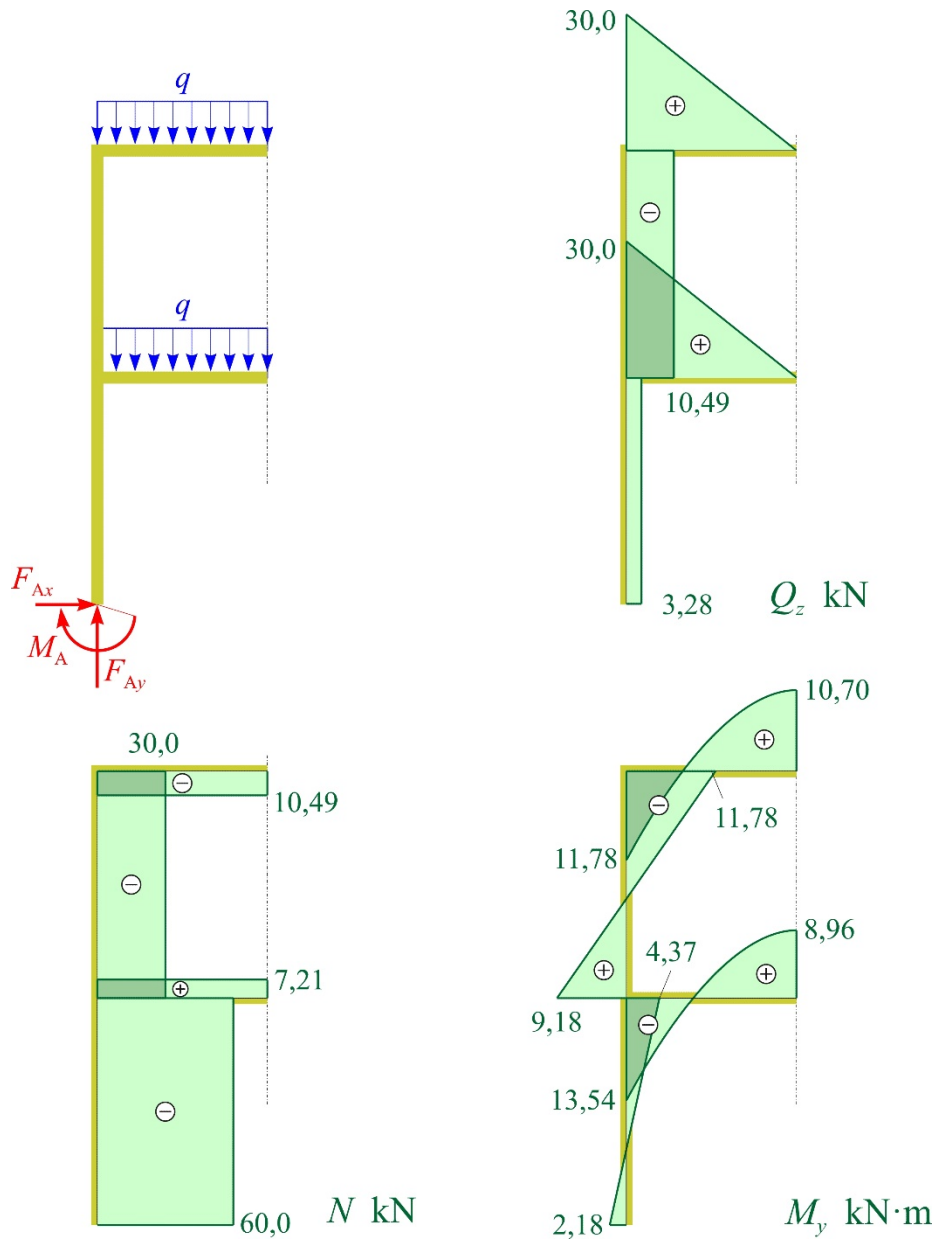
Zadatak 6.4.



Zadatak 6.5.



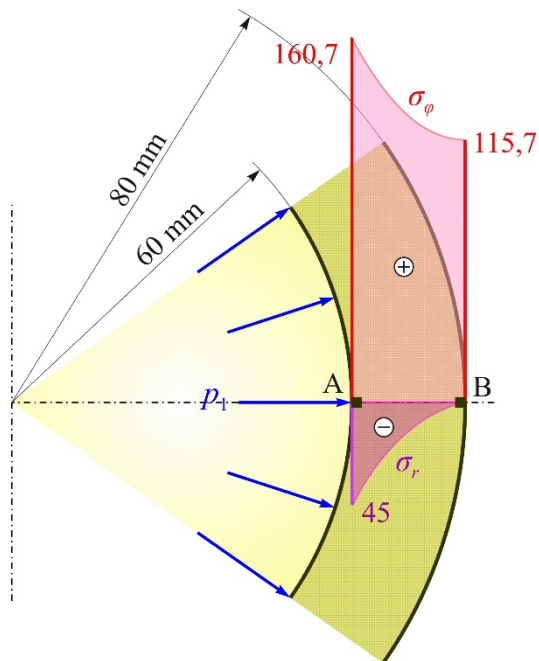
Zadatak 6.6.



7. Debelostijene cilindrične posude i cijevi

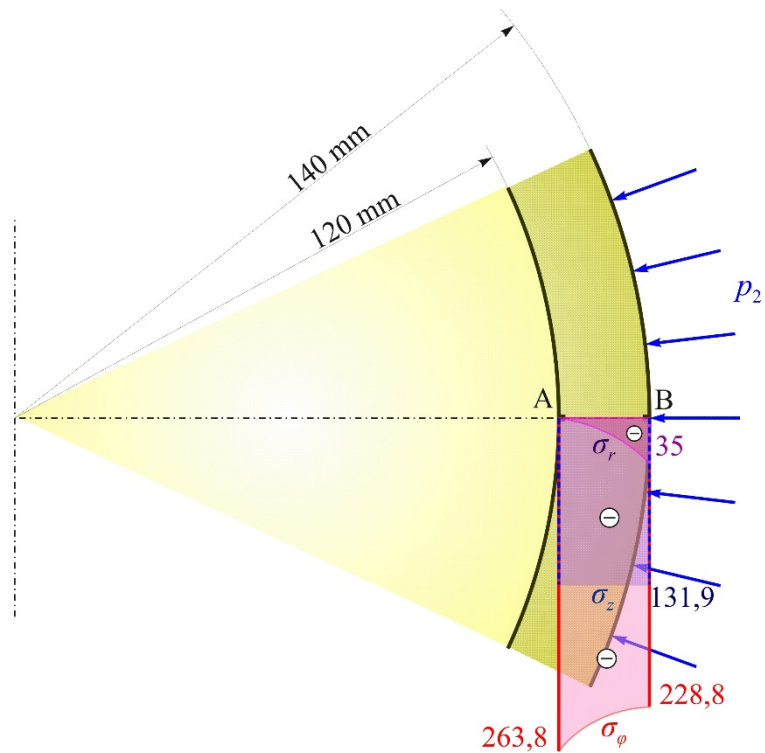
Zadatak 7.1.

$$u_A = 0,052 \text{ mm}, \quad u_B = 0,046 \text{ mm}.$$



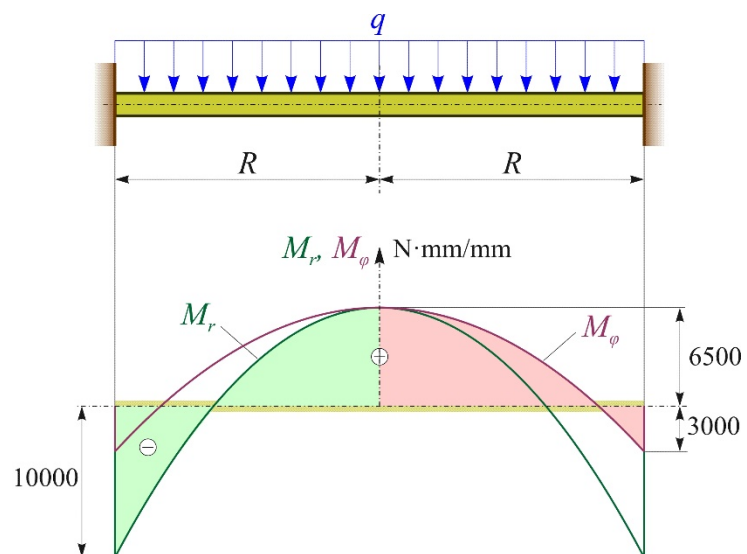
Zadatak 7.2.

$$u_A = -0,135 \text{ mm}, \quad u_B = -0,125 \text{ mm}.$$



8. Savijanje tankih kružnih ploča

Zadatak 8.1.



$$w_{\max} = w(0) = 2,6 \text{ mm}, \quad \alpha_{\max} = \alpha\left(R/\sqrt{3}\right) = 0,02001 \text{ rad},$$

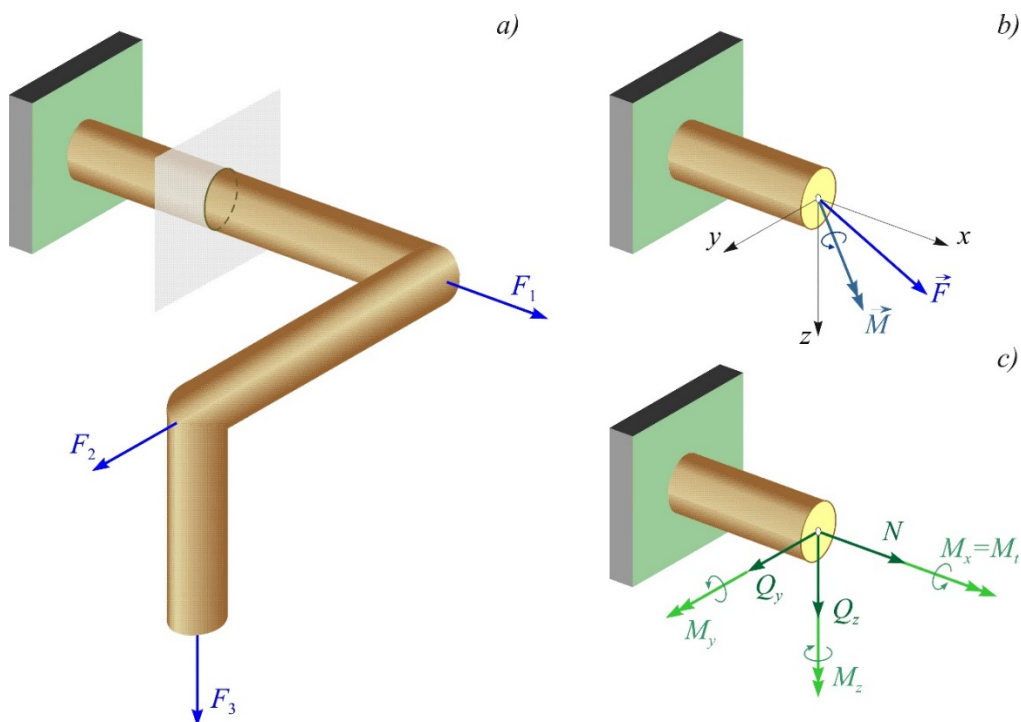
$$|\sigma_{r,\max}| = |\sigma_r(R)| = 600 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\varphi,\max} = \sigma_\varphi(0) = 390 \text{ MPa}.$$

A. UNUTARNJE SILE U PRESJECU ŠTAPA

Kod energijskih metoda važan korak predstavlja određivanje unutarnjih sila u poprečnom presjeku štapa. Općenito se kod prostornog sustava štapova, u proizvoljnom poprečnom presjeku štapa, javlja šest komponenata unutarnjih sila (slika A.1.):

- N – uzdužna sila
- Q_y – poprečna sila duž lokalne osi y
- Q_z – poprečna sila duž lokalne osi z
- $M_x \equiv M_t$ – moment uvijanja
- M_y – moment savijanja u odnosu na lokalnu os y
- M_z – moment savijanja u odnosu na lokalnu os z .

Budući da je uočeno da većina pogrešaka pri korištenju energijskih metoda u proračunima proizlazi iz loše određenih unutarnjih sila, u primjerima koji slijede ponovit će se postupak određivanja unutarnjih sila pri različitim slučajevima opterećenja štapa ili sustava štapova.



Slika A.1. Unutarnje sile u poprečnom presjeku štapa

A.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE

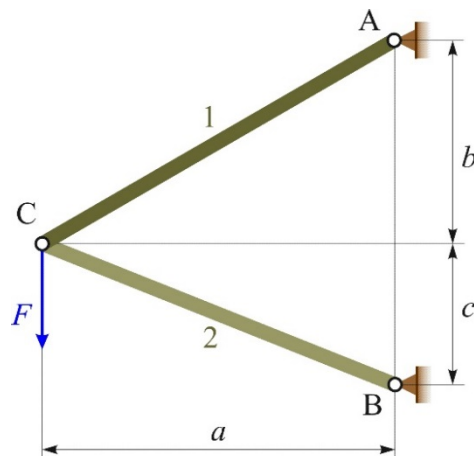
Pri aksijalnom opterećenju u poprečnom presjeku štapa od unutarnjih sila javlja se samo uzdužna sila N . Pozitivna uzdužna sila u poprečnom presjeku štapa ima isti smjer kao vanjska normala na presjek. U zadacima koji slijede pretpostavljat će se uvijek da je uzdužna sila

pozitivna. Ako se u rezultatu uz vrijednost sile dobije pozitivan predznak, pretpostavka je ispravna i obrnuto.

Primjer A.1.

Konstrukcija sastavljena od dvaju štapova opterećena je silom iznosa F prema slici A.2. Valja izračunati uzdužne sile u štapovima 1 i 2.

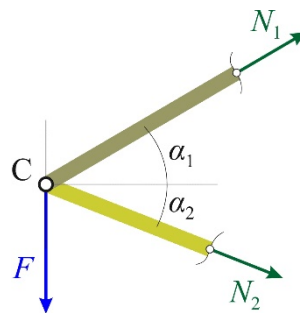
Zadano je: $F = 15 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$.



Slika A.2. Primjer A.1.

Rješenje:

Uzdužne sile u štapovima 1 i 2 mogu se dobiti metodom presjeka iz uvjeta ravnoteže postavljenih za čvor C. Čvor C s prikazom sila prikazan je na slici A.3.



Slika A.3. Primjer A.1.

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: N_1 \cdot \cos \alpha_1 + N_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: N_1 \cdot \sin \alpha_1 - N_2 \cdot \sin \alpha_2 - F = 0,$$

gdje su kutovi α_1 i α_2 dobiveni kako slijedi:

$$\tan \alpha_1 = \frac{b}{a} = \frac{1,5}{2} = 0,75, \alpha_1 = 36,87^\circ; \quad \tan \alpha_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} = 0,5, \alpha_2 = 26,57^\circ.$$

Dalje je:

$$0,8 \cdot N_1 + 0,894 \cdot N_2 = 0,$$

$$0,6 \cdot N_1 - 0,447 \cdot N_2 = 15.$$

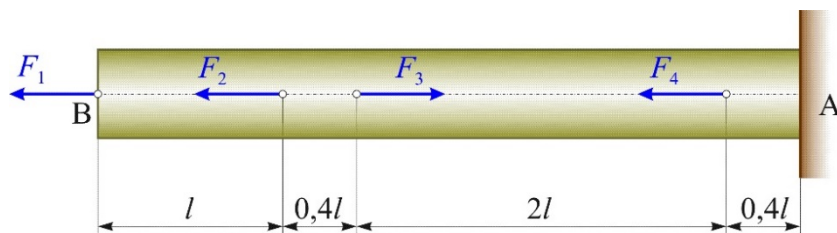
Rješavanjem gornjeg sustava jednačaba dobiju se tražene uzdužne sile u štapovima:

$$N_1 = 15,0 \text{ kN}; \quad N_2 = -13,4 \text{ kN}.$$

Primjer A.2.

Za aksijalno opterećen štap prema slici A.4. valja odrediti raspodjelu uzdužnih sila po svim područjima te skicirati njihov dijagram.

Zadano je: $F_1 = 3 \text{ kN}$, $F_2 = 7 \text{ kN}$, $F_3 = 13 \text{ kN}$, $F_4 = 16 \text{ kN}$.



Slika A.4. Primjer A.2.

Rješenje:

Raspodjela uzdužnih sila po svim područjima dobit će se metodom presjeka te postavljanjem uvjeta ravnoteže za odsječeni dio štapa lijevo od presjeka kako slijedi:

- I. područje: $0 \leq x \leq l$ (slika A.5.a)

$$\sum F_x = 0: \quad N_1 - F_1 = 0, \quad N_1 = F_1 = 3 \text{ kN};$$

a)

b)



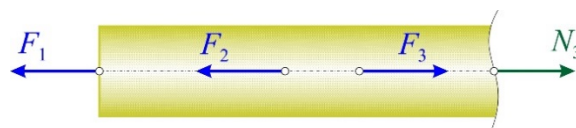
Slika A.5. Primjer A.2.

- II. područje: $l \leq x \leq 1,4 \cdot l$ (slika A.5.b)

$$\sum F_x = 0: \quad N_2 - F_1 - F_2 = 0, \quad N_2 = F_1 + F_2 = 3 + 7 = 10 \text{ kN};$$

- III. područje: $1,4 \cdot l \leq x \leq 3,4 \cdot l$ (slika A.6.)

$$\sum F_x = 0: \quad N_3 - F_1 - F_2 + F_3 = 0, \quad N_3 = F_1 + F_2 - F_3 = 3 + 7 - 13 = -3 \text{ kN};$$

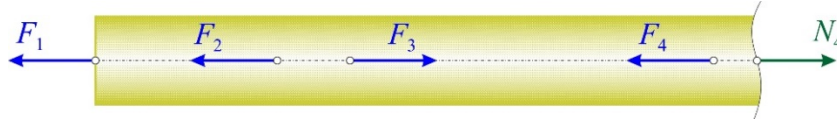


Slika A.6. Primjer A.2.

- IV. područje: $3,4 \cdot l \leq x \leq 3,8 \cdot l$ (slika A.7.)

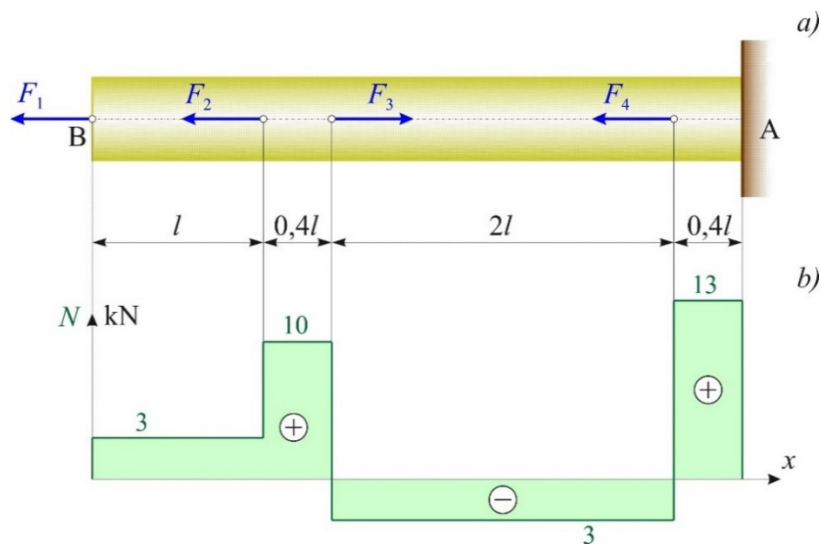
$$\sum F_x = 0: N_4 - F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 0,$$

$$N_4 = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 3 + 7 - 13 + 16 = 13 \text{ kN}.$$



Slika A.7. Primjer A.2.

Prema gore izračunanim vrijednostima može se nacrtati dijagram uzdužnih sila prikazan na slici A.8.

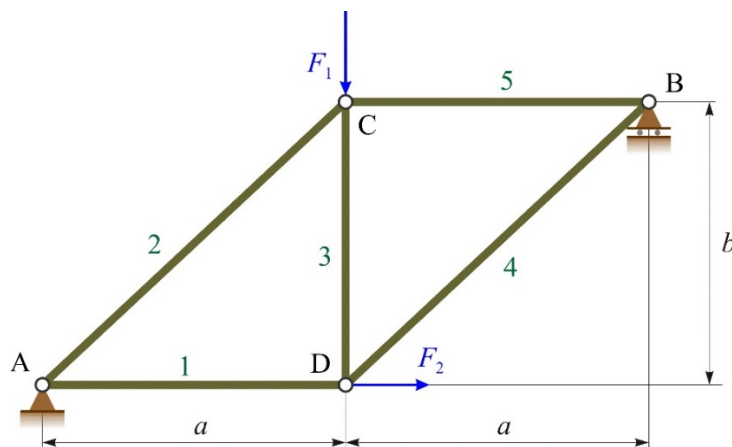


Slika A.8. Primjer A.2.

Primjer A.3.

Za rešetkastu konstrukciju zadanu i opterećenu prema slici A.9. valja izračunati reakcije oslonaca te uzdužne sile u svim štapovima.

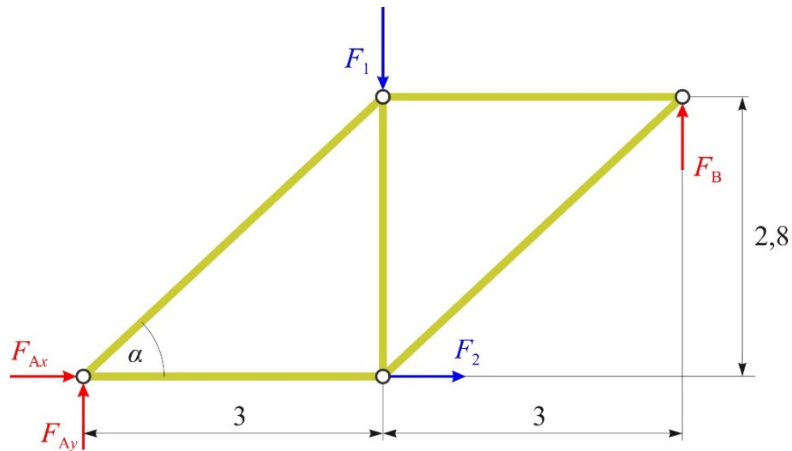
Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2,8 \text{ m}$, $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$.



Slika A.9. Primjer A.3.

Rješenje:

Rešetka oslobođena od veza s prikazom svih sila koje na nju djeluju prikazana je na slici A.10.



Slika A.10. *Primjer A.3.*

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F_2 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - F_1 + F_B = 0,$$

$$\sum M_A = 0: F_B \cdot 6 - F_1 \cdot 3 = 0.$$

Rješavanjem navedenih jednačaba dobiju se tražene reakcije oslonaca:

$$F_{Ax} = -5 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 5 \text{ kN}; \quad F_B = 5 \text{ kN}.$$

Uzdužne sile u štapovima mogu se dobiti po metodi čvorova postavljanjem uvjeta ravnoteže za svaki čvor.

Iz uvjeta ravnoteže postavljenih za čvor A (slika A.11.a) koji glase:

$$\sum F_x = 0: N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha + F_{Ax} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: N_2 \cdot \sin \alpha + F_{Ay} = 0,$$

gdje je kut α dobiven prema:

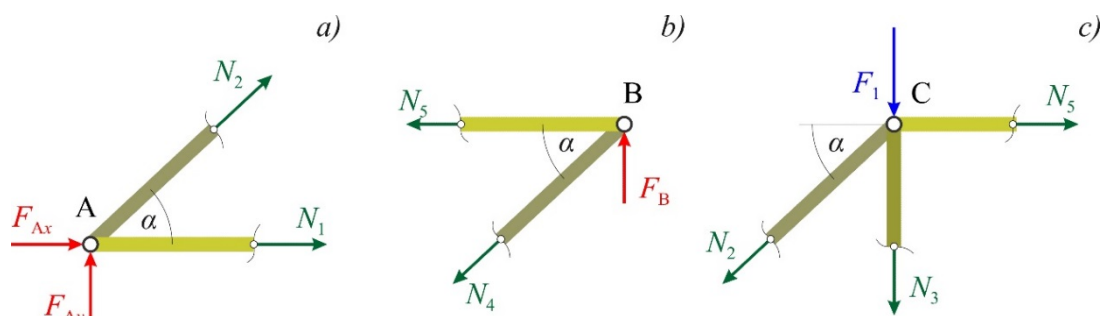
$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{2,8}{3} = 0,933333,$$

$$\alpha = 43,03^\circ,$$

slijede uzdužne sile u štapovima 1 i 2:

$$N_1 = 10,36 \text{ kN},$$

$$N_2 = -7,33 \text{ kN}.$$



Slika A.11. *Primjer A.3.*

Na slici A.11.b prikazane su sile koje djeluju na čvor B. Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: -N_5 - N_4 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: -N_4 \cdot \sin \alpha + F_B = 0.$$

Rješavanjem sustava jednačaba dobije se:

$$N_4 = 7,33 \text{ kN},$$

$$N_5 = -5,36 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za čvor C (slika A.11.c) mogu se napisati u obliku:

$$\sum F_x = 0: N_5 - N_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: -N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 - F_1 = 0,$$

odakle je:

$$N_3 = -5 \text{ kN}.$$

A.2. UVIJANJE

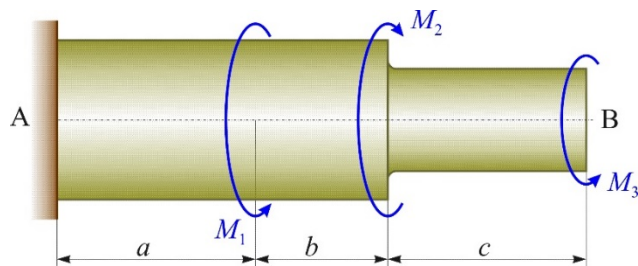
Kada je štap opterećen na uvijanje u njegovu poprečnom presjeku od unutarnjih sila javlja se samo moment uvijanja M_t . U zadacima koji slijede pretpostavljać se uvijek da je moment uvijanja pozitivan. Ako se u rezultatu uz vrijednost momenta uvijanja dobije pozitivan predznak, pretpostavka je ispravna i obrnuto.

Pozitivan moment uvijanja određuje se pravilom desne ruke, tako da se palac stavi u smjeru vanjske normale na presjek.

Primjer A.4.

Štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata ukliješten je na lijevom kraju i opterećen momentima M_1 , M_2 i M_3 prema slici A.12. Valja odrediti dijagram momenta uvijanja.

Zadano je: $M_1 = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_3 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



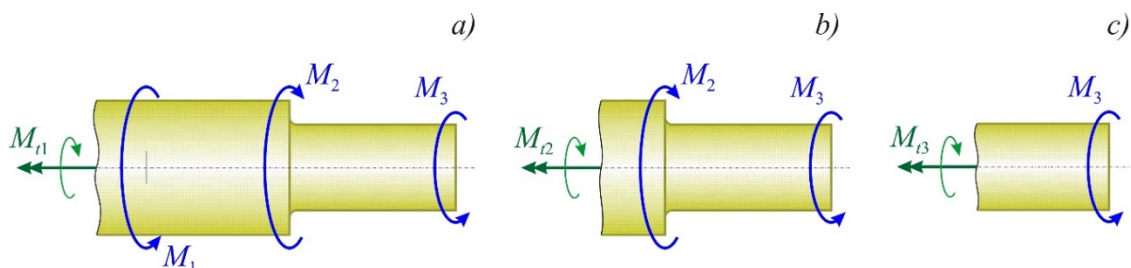
Slika A.12. *Primjer A.4.*

Koristeći se metodom presjeka i postavljanjem uvjeta ravnoteže za dio štapa desno od presjeka mogu se dobiti momenti uvijanja za svako područje štapa kako slijedi:

- *I. područje:* $0 \leq x \leq a$ (slika A.13.a)

$$\sum M_x = 0: -M_{t1} + M_1 - M_2 + M_3 = 0,$$

$$M_{t1} = M_1 - M_2 + M_3 = 15 - 8 + 5 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m};$$



Slika A.13. *Primjer A.4.*

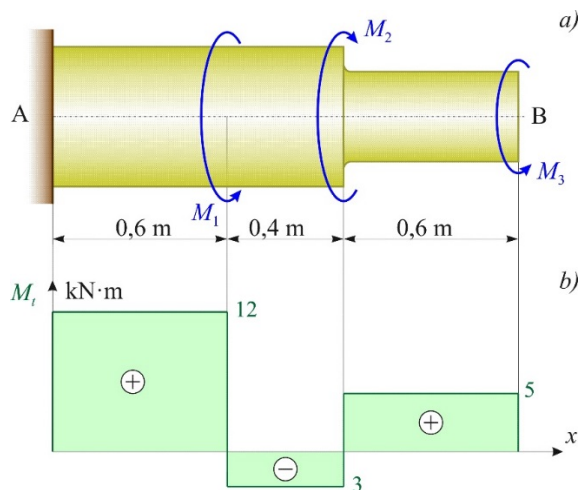
- *II. područje:* $a \leq x \leq a + b$ (slika A.13.b)

$$\sum M_x = 0: -M_{t2} - M_2 + M_3 = 0, \quad M_{t2} = -M_2 + M_3 = -8 + 5 = -3 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

- *III. područje:* $a + b \leq x \leq a + b + c$ (slika A.13.c)

$$\sum M_x = 0: -M_{t3} + M_3 = 0, \quad M_{t3} = M_3 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Dijagram momenta uvijanja prikazan je na slici A.14.



Slika A.14. *Primjer A.4.*

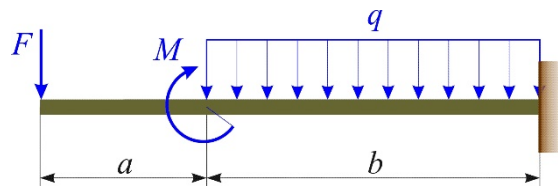
A.3. SAVIJANJE – linijski nosači

Pri savijanju silama (opterećenje djeluje u vertikalnoj ravnini okomito na uzdužnu os nosača) u poprečnom presjeku štapa javljaju se poprečna sila Q_z i moment savijanja M_y .

Primjer A.5.

Linijski nosač uklješten je na desnom kraju i opterećen prema slici A.15. Potrebno je odrediti unutarnje sile po područjima nosača te skicirati i kotirati njihove dijagrame.

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F = 5 \text{ kN}$, $M = 11 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $q = 8 \text{ kN/m}$.



Slika A.15. Primjer A.5.

Unutarnje sile po područjima nosača mogu se dobiti razmatranjem ravnoteže odsječenog dijela nosača lijevo od presjeka.

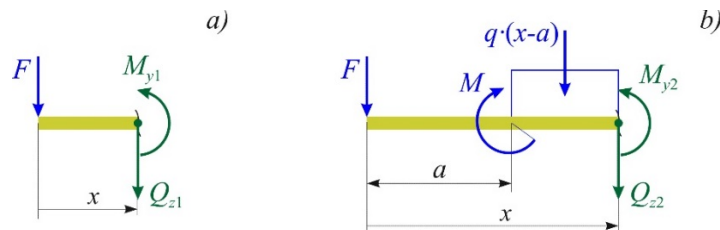
- I. područje: $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$ (slika A.16.a)

$$\sum F_z = 0: Q_{z1} + F = 0,$$

$$Q_{z1} = -F = -5 \text{ kN}$$

$$\sum M_p = 0: M_{y1} + F \cdot x = 0,$$

$$M_{y1} = -F \cdot x = -5 \cdot x, \quad M_{y1}(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{y1}(1) = -5 \text{ kN} \cdot \text{m};$$



Slika A.16. Primjer A.5.

- II. područje: $1 \leq x \leq 3 \text{ m}$ (slika A.16.b)

$$\sum F_z = 0: Q_{z2} + F + q \cdot (x - a) = 0,$$

$$Q_{z2} = -F - q \cdot (x - a) = -5 - 8 \cdot (x - 1) = -8 \cdot x + 3,$$

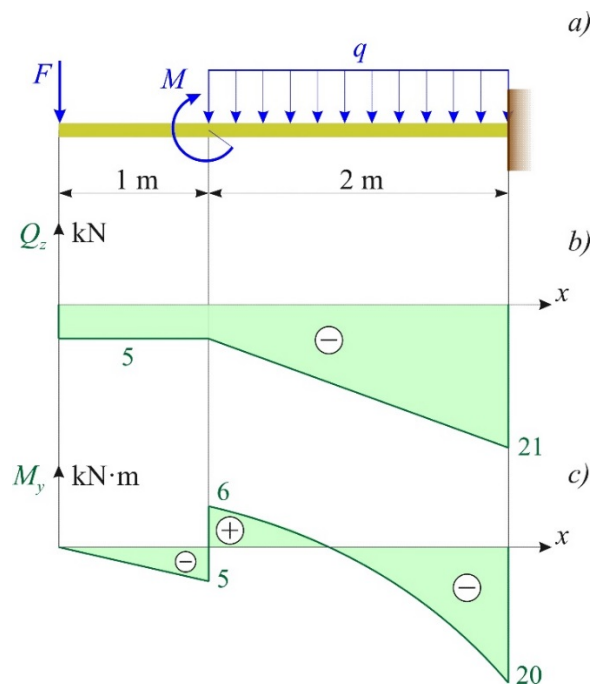
$$Q_{z2}(1) = -5 \text{ kN}, \quad Q_{z2}(3) = -21 \text{ kN}$$

$$\sum M_p = 0: M_{y2} + F \cdot x - M + q \cdot \frac{(x - a)^2}{2} = 0$$

$$M_{y2} = -F \cdot x + M - q \cdot \frac{(x-a)^2}{2} = -5 \cdot x + 11 - 8 \cdot \frac{(x-1)^2}{2} = -4 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 7$$

$$M_{y2}(1) = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{y2}(3) = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Dijagrami unutarnjih sila dani su na slici A.17.



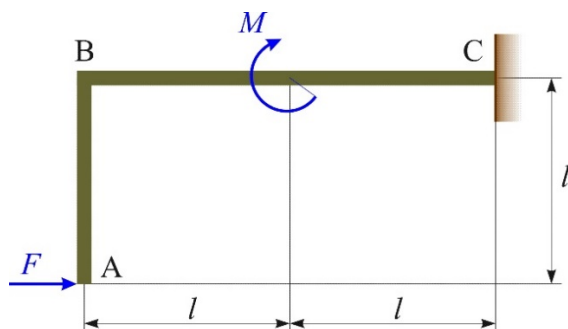
Slika A.17. *Primjer A.5.*

A.4. SAVIJANJE – okvirni nosači

Kod okvirnog nosača u ravnini se u poprečnom presjeku javljaju uzdužna sila N , poprečna sila Q_z i moment savijanja M_y (oznake su u odnosu na lokalne koordinatne sustave).

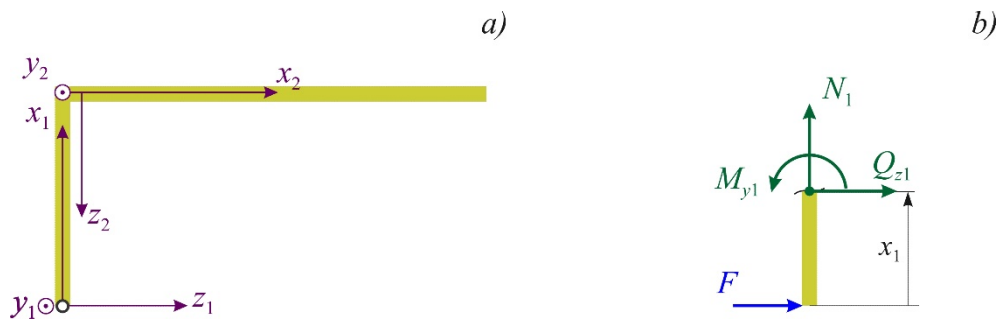
Primjer A.6.

Okvirni nosač s opterećenjem prikazan je na slici A.18. Nosač je vezan za podlogu uklještenjem u C. Valja odrediti dijagrame unutarnjih sila po područjima okvirnog nosača ako je zadano: $l = 1 \text{ m}$, $F = 10 \text{ kN}$, $M = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika A.18. *Primjer A.6.*

Za određivanje unutarnjih sila u presjecima okvirnog nosača koriste se lokalni koordinatni sustavi koji su prikazani na slici A.19.a.



Slika A.19. *Primjer A.6.*

Dio okvirnog nosača AB

- *I. područje:* $0 \leq x_1 \leq 1$ m (slika A.19.b)

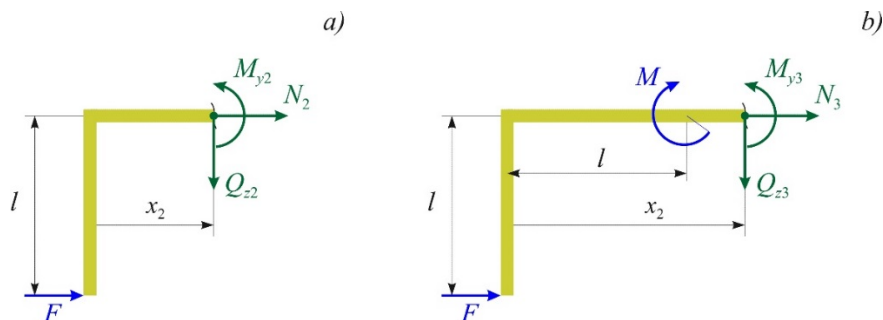
Na slici A.19.b prikazan je odsječeni dio nosača. Uvjeti ravnoteže pisani u odnosu na lokalni koordinatni sustav glase:

$$\sum F_{x1} = 0: N_1 = 0$$

$$\sum F_{z1} = 0: Q_{z1} + F = 0, \quad Q_{z1} = -F = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M_p = 0: M_{y1} + F \cdot x = 0,$$

$$M_{y1} = -F \cdot x = -10 \cdot x, \quad M_{y1}(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{y1}(1) = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



Slika A.20. *Primjer A.6.*

Dio okvirnog nosača BC

- *I. područje:* $0 \leq x_2 \leq 1$ m (slika A.20.a)

Uvjeti ravnoteže za dio nosača lijevo od presjeka glase:

$$\sum F_{x2} = 0: N_2 + F = 0, \quad N_2 = -F = -10 \text{ kN},$$

$$\sum F_{z2} = 0: Q_{z2} = 0,$$

$$\sum M_p = 0: M_{y2} + F \cdot 1 = 0, \quad M_{y2} = -10 \cdot 1 = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- II. područje: $1 \leq x_2 \leq 2$ m (slika A.20.b)

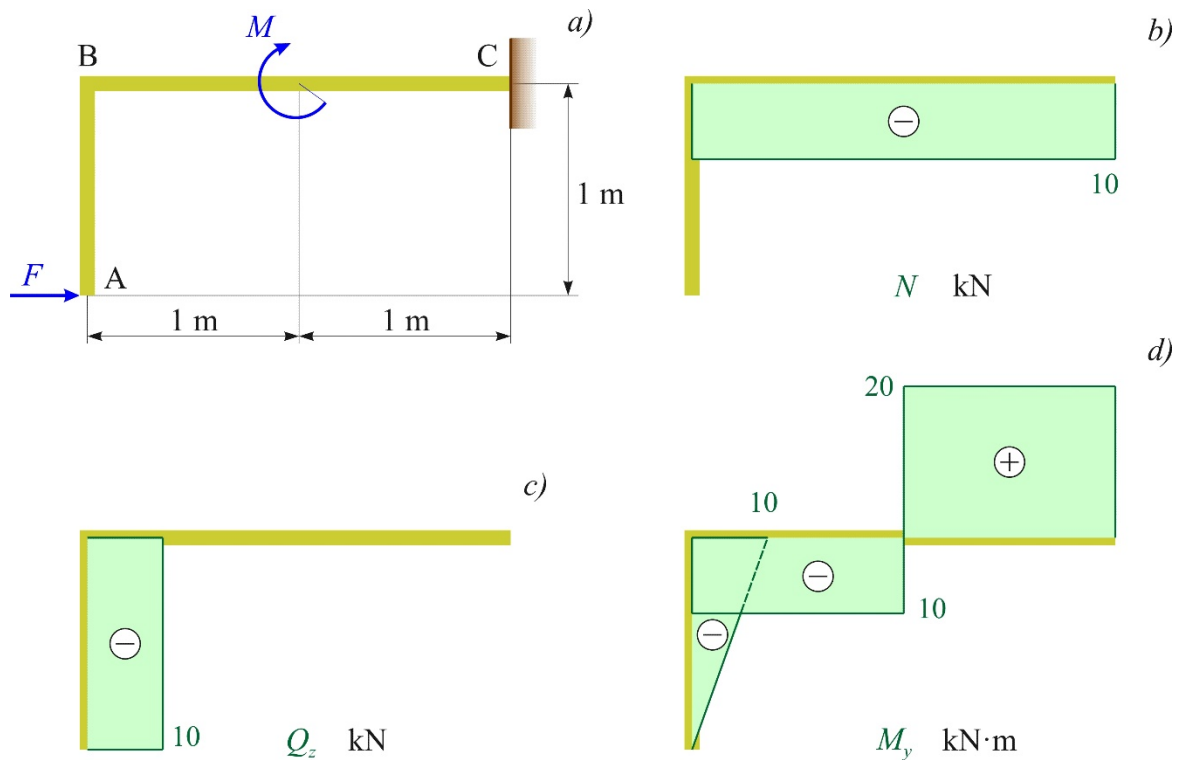
Uvjeti ravnoteže za dio nosača lijevo od presjeka glase:

$$\sum F_{x2} = 0: N_3 + F = 0, \quad N_3 = -F = -10 \text{ kN},$$

$$\sum F_{z2} = 0: Q_{z3} = 0,$$

$$\sum M_p = 0: M_{y3} + F \cdot 1 - M = 0, \quad M_{y3} = -10 \cdot 1 + 30 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Dijagrami unutarnjih sila dani su na slici A.21.



Slika A.21. *Primjer A.6.*

L I T E R A T U R A

- [1] Alfirević, I. *LINEARNA ANALIZA KONSTRUKCIJA*, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, FSB Zagreb, Zagreb 1999.
- [2] Alfirević, I. *NAUKA O ČVRSTOĆI II*, Golden marketing, Zagreb 1999.
- [3] Brnić, J., Turkalj, G. *NAUKA O ČVRSTOĆI II*, Udžbenici Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2006.
- [4] Craig, Roy R. Jr. *MECHANICS of MATERIALS, Second Edition*, Wiley & Sons, New York, 2000.
- [5] Hibbeler, R. C. *STRUCTURAL ANALYSIS, Eight Edition*, Pearson Prentice Hall, London, 2012.
- [6] Karnovsky, I. A., Lebed, O. *ADVANCED METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS*, Springer, London, 2010.
- [7] Pavazza, R. *ENERGIJSKE METODE. Uvod u strukturnu analizu*, Udžbenici Sveučilišta u Splitu, Element Zagreb, Zagreb 2018.
- [8] Pustaić, D., Tonković, Z., Wolf, H. *MEHANIKA DEFORMABILNIH TIJELA 2. Čvrstoća elemenata konstrukcija*, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, FSB Zagreb, Zagreb 2014.
- [9] Pustaić, D., Tonković, Z., Wolf, H. *MEHANIKA DEFORMABILNIH TIJELA 1. Mehanika konstrukcija*, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, FSB Zagreb, Zagreb 2014.
- [10] Šimić, V., *OTPORNOST MATERIJALA II*, Školska knjiga, Zagreb 2002.